Topolojik Hamilton Denklemleri ile Elektrik Devrelerinin(*) Analizi ve liapunov Kararlılığı

Yazan:
Necdet ŞEN
Blekt Y. Müh.
Karadeniz Teknik Üniversitesi

ÖZET :

Bu yazıda bağımlı ve bağımsız gerilim ve ahım kaynaklan, başlangıç şartları bulunduran genel tipten RLCM devrelerinin Çevre Yüklerive Düğüm-Çifti Kaçak Akıları ile topolojik çözümleri (Graflar Teorisi) araştırılmıştır. Geliştirilmiş olan metotta Kanonik Hamilton Matris Denklemlerinin Lineer ve Lineer-olmayan durumlardaki kullanılışı en genel anlamda açıklanmıştır. İşaret Akışı-Matris Diyagramlarının kullanılabileceğine değinilmiş ve böyle bir sistemin kararlılığında Direkt Liapunov Metodu ile Hamilton Enerji - Durumu Fonksiyonlarının göz önüne alınması ile sistem kararlılığı incelenmiştir.

Giriş:

Fiziksel bir sistemin yapısını kuran enerji birikürici ve enerji kaybedlci pasif elemanlar göz önüne alınırsa, sistemin çözümü enerji kavramı ile en genel yoldan ve doğruya aranabilir. Böylece lineer bir sistem İçin olduğu kadar lineer - olmayan bir sistem İçinde doğru dürüst ve tam bir çözüm bulunmuş olacaktır. Enerji çeşitli fiziksel şekillere dönttşeblldiğlne göre, bilhassa karışık yapıya sahip fiziksel sistemlerin çözümünde analoji prensibinin kullanılması İle tam çözümü elde etmek mümkün olur. Klâsik Analitik Mekanikten bilinen Lagrange ve Hamilton Denklemleri enerji temel düşüncesine dayandıkları İçin sistemlerin tam çözümlerinin bulunmasında başarılı bir yol sağlamış olurlar.

Elektrik devrelerinde kapasitanslar elektrik, endûktanalar oıagnetik enerji biriktirebllen pasif devre elemanları, dirençler İse enerji kaybeden devre elemanlarıdırlar. Bu elemanların akım - gerilim karakteristikleri ya lineer veya lineer - olmayan eğriler geklindedirler. Lineer durumda R, L, \C, M devre parametreleri sabit değerier olarak tanımlanabilirler, fakat lineer - olmayan durumlarda sabit değerler olmaktan çıkıp birer fonksiyon durumunda tanımlanabilirler. Böylece kapasitans ve endüktanslann enerji ve ko-enerjilerinin göz önüne alınması İle Lagrange ve Hamilton durum fonksiyonları yazılabilir. Bu fonksiyonlar bir elektrik devresi için iq elektrik yük-
NOT • Bu yazı yazarın 13 - 14 Mayıs 1968 de A B.D.
leri ve magnetik kaçak akılan cinsinden aşağıdaki tanımlanabilirler.

Enerji ve Dunun Fonksiyonları:

Analitik Dinamikten bilinen enerji durum fonksiyonları dört şekildedir [2, 7]. Elektrik devreleri İçin bunlar topolojik olarak kapasitans ve endüktanslann [^(t)-!-^(0+)] ve

$[\lambda_L(t)+$ AL (0+)] yük ve akıları cinsinden tanımlanabilirler [3, 4, 5]. Bunlar matris biçimlerde aşağıdaki yazılabilirler.

$$T(\lambda_L)=\int_0^{\lambda_L} \dot{q}_L^{t}[\lambda_L(t)+\lambda_L(0^+)]\, d\lambda(t)$$

$$T'(\dot{q}_L)=\int_0^{\dot{q}_L} \lambda_L^{t}[\dot{q}_L(t)]\, d\dot{q}_L(t)$$

Enerji, ko-enerji ve enerji durum fonksıyonla-n arasındaki bağıntılar Legendre Transformasyonu [2, 4, 7] ile matris biçimde aşağıdaki yazılabilirler.

Lagrange ve Hamilton Denklemlerinin Topolojik Geliştirilmesi:

Konservatif - olmayan, yani sakınımsız durumlar için Lagrange denklemleri [2, 6, 7, 8] matris biçimlerde aşağıdaki gibi yazılabilir (3).

(*) Bu yazı, 13-14 Mayıs 1968 de ABD de Indlana Eyaletinde University of Nötre Dame de yapılan «llth Midwest Symposium on Circuit Tûeory» konîeranslarrnda bizzat takdim, ettiği tebliğin tercümesidir.

Bu denklemler, diferansiyel denklem takımları olup lineer veya lineer delillerdirler.

Lineer olmayan dirençlerin Rayleig ve Ko-Raylelg kayıp fonksiyonları (4) deki gibi integral biçimde tanımlanabilir.

(3) denklemindekl denklemlerin birincisi elektrik devreleri teorisinden bildiğimiz Çevre Akımları Metodu, ikincisi ise Düğüm - Çiftleri Metodu'na denktir.

(3) de görülen Lagrange Denklemleri ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, buna karşılık yine Klâsik Analitik Mekanikten bilinen Hamilton Denklemleri birinci mertebeden kanonik diferansiyel denklemlerdirler. Bu yüzden Lagrange denklemlerini Hamilton denklemleri şekline getirmekte çözüm kolaylığı bakımından büyük fayda vardır. Legendre Transformasyon'lan kullanılmakla (2) bağıntı]arından faydalanmış olunur ve Kanonik Hamilton Denklemleri 2,7 elde olunur. Bu denklemler matria biçimde (5) deki gibi görülmektedirler.

Bu denklemler topolojik çevre ve düğüm - çifti transformasyon matris transformasyonları ve elektrik yükleri ve magnetik akıların sürekliliği 5 yardımı ile aşağıdaki şekle sokulabilirler.

Akı ve yüklerin sürekliliği ile topolojik olarak, saf endüktif kesitlerde ağaç endüktansların yükleri sıfırdır ve yine aynı prensipten dolayı saf kapasitif çevrelerde bağ kapasitelerinin

$$T\left(C_L^t \lambda_2 + \lambda_L(0^+)\right) = \dot q_L^t \lambda_L - T'(B_L^t \dot q_1)$$

$$U\left[B_c^t q_1 + q_c(0^+)\right] - \dot q^t \dot I \cdots W(C_c^t \dot\lambda_2)$$

$$H(q_c, \lambda_L) = \lambda_L \dot q_L^t - L'(q_c, \dot q_L)$$

$$H'(\dot q_L, \lambda_c) = \dot\lambda_c^t q_c + L(\lambda_L, \dot\lambda_c) \qquad \text{.. (2)}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q_1}\right]^t - \left[\frac{\partial L}{\partial q_1}\right]^t + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot q_1}\right]^t = V_g$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L'}{\partial \dot\lambda_2}\right]^t - \left[\frac{\partial L'}{\partial \lambda_2}\right]^t + \left[\frac{\partial F'}{\partial \dot\lambda_2}\right]^t = I_g$$

$$\text{.......................... (3)}$$

$$U(q_c) = \int_0^{q_c} \dot\lambda_c^t \left[q_c(t) + q_c(0^+)\right] dq_c(t)$$

$$U'(\dot\lambda_c) = \int_0^{\lambda_c} q_c^t \left[\dot\lambda_c(t)\right] d\dot\lambda_c(t) \qquad \text{.......................... (1)}$$

$$L(q_c, \dot q_L) = T'\left[\dot q_L(t)\right] - U\left[q_c(t) + q_c(0^+)\right]$$

$$L'(\lambda_L, \dot\lambda_c) = U'\left[\dot\lambda_c(t)\right] - T\left[\lambda_L(t) + \lambda_L(0^+)\right]$$

$$H(q_c, \lambda_L) = T\left[\lambda_L(t) + \lambda_L(0^+)\right] - U\left[q_c(t) + q_c(0^+)\right]$$

$$H'(\dot q_L, \dot\lambda_L) = T'\left[q_L(t)\right] + U'\left[\dot\lambda_c(t)\right]$$

$$F(\dot{q}_R) = \int_0^{\dot{q}_R} \dot{\lambda}_R^t(\dot{q}_R)\, d\dot{q}_R$$

$$F'(\dot{\lambda}_R) = \int_0^{\lambda_R} \dot{q}_R^t(\dot{\lambda}_R)\, d\dot{\lambda}_R \qquad \text{..................... (4)}$$

$$\dot{\lambda}_L = -\left\{\frac{\partial H}{\partial q_c}\right\}^t - \left\{\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_R}\right\}^t + V_g$$

$$\dot{q}_c = -\left\{\frac{\partial H}{\partial \lambda_L}\right\}^t - \left\{\frac{\partial F'}{\partial \dot{\lambda}_R}\right\}^t + I_g$$

aküan sıfır olur; Fakat aynı prensipten dolayı ağaç kapasitelerinin akılan ve bağ endüktanslarının yükleri sıfır olmazlar. Böylece q_{1L} ve ^ durum değişkenleri [1] hesaplanabilirler. Bağ dirençlerinin yükleri ve ağaç dirençlerinin akılan sıfır olmazlar. Saf direnç kesitleri İçin aynı düşünce geçerlidir [5]. Diğer taraftan akım kaynaklarının akı kaynağı ve gerilim kaynaklarının da yük kaynaklan olduğunu unutmamak gerekir [5].

Yukardakl düşüncelere dayanarak bütün enerji ve kayıp fonksiyonları (7) deki gibi yazılır.

veya

$$\dot{q}_c = \left\{\frac{\partial L'}{\partial \lambda_L}\right\}^t - \left\{\frac{\partial F'}{\partial \dot{\lambda}_R}\right\}^t + I_g$$

.... (5)

$$\left\{\frac{\partial U\left[B_c^t q_1 + q_c(0^+)\right]}{\partial q_1}\right\}^t = -\dot{\lambda}_L - \left\{\frac{\partial F(B_R^t \dot{q}_1)}{\partial \dot{q}_1}\right\}^t + V_g$$

$$\left\{\frac{\partial T\left[C_L^t \lambda_2 + \lambda_L(0^+)\right]}{\partial \lambda_2}\right\}^t = -\dot{q}_c - \left\{\frac{\partial F'(C_R^t \dot{\lambda}_2)}{\partial \dot{\lambda}_2}\right\}^t + I_g$$

veya

$$\left\{\frac{\partial U_c}{\partial q_1}\right\}^t = \left[D_L \quad -1\right]^t \dot{\lambda}_{2L}^t - \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_1}\right]^t + V_g \qquad \text{............ (6a)}$$

.... (6b)

$$\left[\frac{\partial T_L}{2 \quad £, \quad L \quad A,9}\right]^t + I_g$$

$$T = T\left\{(-C^t_{1L} D^t \left[\lambda_{2R}\ \lambda_{2c}\ \lambda_E\ \lambda_{2L}\right]^t \quad C^t_{2L}\ \lambda^t_{2L}) + L(0^t)\right\}$$

$$T' = T'(B^t_{1L}\dot{q}_{1L})$$

$$U_1 \Big\{ B_{1c*zc} \quad B^*_{2c} D_{L}^{t} g_{aL} \quad q_{1L} \quad q_{1c} \quad q_1 f) + o(o^*) \Big\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7;$$

$$U' = U'(C^t_{2c}\lambda_{2c})$$

(6) denklemlerinin sol tarafı $\dot{\lambda}_{c}$ ve ($\dot{q}_{1L}$ cinslndendir. Bunlar ağaç kapasitanslannın gerilmeleri ve bağ endüktanslarının akımlarıdırlar [1]. Burada bağlıca amacımız Boskhow-Bryant [1, 3] kanonik durum denklemi şekline sokmaktır (8).

$$\dot{x} = Ax + f \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Burada bağımlı kaynakların etkisi A katsayılar matrisinin içerisindedir (8). Denklemi lineer bir sistemi göstermekte olup bu bağıntının birtakım transformasyonlarla lineerize etmek mümkündür. Böylece (8) denklem takımının sağ yanı lineer duruma dönüşmüş olur. Lineer durumdaki çok değişkenli sistemlerin genel incelemesi yapılabilir. Lüzumsuz değişkenlerde işaret akışı diyagramları ile kolaylıkla yok edilebilir. Çok değişkenli sistemlerde bu diyagramlar matris bağıntılarla slstematize edilirler ve lineer ve lineer-olmayan durumlar için sistem analizi yapılmış olacaktır [10, 11].

Llapunov Kararlılığı ve Hamllton Durum Fonksiyonları:

Liapunov Kararlılık Metodu '[9] en genel ve kullanışlı bir kararlılık araştırma metodu olup lineer ve lineer-olmayan durumlarda çok başarılıdır. Ancak burada gerekli Liapunov Enerji Fonksiyonunun seçilmesi başlıca problemdir, Liapunov Direkt veya İkinci Metodu sistemdeki biriken enerji esasına dayanmaktadır. O halde enerji fonksiyonu olarak Hamilton Enerji Durum fonksiyonu Liapunov enerji fonksiyonu olarak seçilebilir.

Liapunov Asiptotik Kararlılık Teoremi [3, 9] gereğince (9) bağıntıları kolayca elde edilebilir. Genel olarak, sistemin herhangibir singüler noktası \q durum uzayının orijini olarak kabul edilirse sistemin Liapunov enerji fonksiyonu

$V = \dot{x}^t L^* \dot{I}C$ şeklinde seçilir.

Son bilgi:

Problemin açıklayıcı örneğini vermeden önce gerekli lineerleştlrmenln nasıl yapılacağı açıklanmalı ve matris tekniği ile geliştirmeleri yapılmalıdır. Bu kısım yazının ikinci bölümünü teşkil etmektedir. Verilen örneklerde işaret akışı diyagramlarının getirmiş olduğu kolaylığı göstermektedir.

$$F = F\left\{B^t_{1R}\dot{q}_{1R} \quad B^t_{2R} D_R \left[\dot{q}_{1L} \quad I_g\ \mathrm{Mİ}\right]\right\}$$

$$F' = F'(-C^*_{1R} D^t_R \left[V_g \quad \lambda_{2c}\right]^t)$$

$$V = H(q_c, \lambda_L) = U(q_c) + T(\lambda_L) = U(B^t_C q_2) + T(C^t_L \lambda_2) > 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dH}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q_c}\dot{q}_c + \frac{\partial T}{\partial \lambda_L}\dot{\lambda}_L \leq 0$$

Son söz :

Yazıda çalışmanın hazırlanması hususunda gerekli teşviklerinden dolayı Prof. Dr. Kemâl Sanoğlu'ya (İ.T.Ü. Elek. Fak.), 11th Mldwest Sympoalum on Circuit Theory, 13 -14 mayıs 1968, Indlana, Unlversity of Nötre Dame, U.S.A. da takdimi İçin gerekil yardımı sağlayan Prof. Dipl. Ing. Ahmet özel'e (K. T. Ü. Rektörü) teşekkür ederim.

Kollanılan Sembollerin Listesi :

L, H : Lagrange ve Hamllton durum fonksiyonları,

T, T' : Devredeki bütün endüktansların toplam magnetlk enerji ve ko-enerji fonksiyonları,

U, U': Devredeki bütün kapasitansların toplam elektrik enerji ve ko-enerji fonksiyonları,

F, F' : Devrenin bütün dirençlerinin toplam Raylelgh dislpasyon ko-dlsipasyon fonksiyonları,

X, \ : Kaçak akı ve türevleri (düğüm - Cifti gerilimleri) vektörleri,

q, q : Yük ve türevleri (çevre akımları) vektörleri,

B, B_c, B_R , B_L : Çevre matrisi ve C, R, L> elemanlarına uygun olarak parçalanmış şekli,

C, C_c CR , C_L : Kesit matrisi ve C, R, L elemanlanna uygun olarak parçalanmış geldi,

D, D^ D_L : Dinamik topolojik transformasyon matrisi ve C, L elemanlarına uygun olarak parçalanmış şekli,

A. $<^{0+}$). 0^(0+): L ve C elemanlarının kaçak akı ve yüklerine ait başlangıç şartları vektörleri,

V_g, I_a : Devredeki' gerilim ve akım kaynaklanının vektörleri,

V : Llapunov enerji fonksiyonu,

X : ^ Durum değişkenleri vektörü,

A : Katsayılar kare matrisi,

f : Devredeki kaynakların matrisi ^

1 : Birim matris

1, 2 : Topolojik bağ ve ağaçlan gösteren indisler,

t: Ma'trlslerin evriklerini gösteren İşaret.

FAYDALANILAN KAYNAKLAR:

1. P. R. Bryant: «Order of complexlty of Electrical Networks», IEE (London), Part C, pp. 174 - 188, June, 1959.
2. S. Seely - H. Goldstein Jr. : «State Functlon Approach to System Analysls», Journal of Franklin Inst. Vol. 283, No: 3, pp. 187 - 202, March, 1967.
3. A/'G. J. Macfarlane : «Engineering System Analysis» Harrap Co., 1964.
4. T. E, Stern: «Theory of Nonllnear Networks and Systems», Addison - Wesley, 1965
5. S. Seşbu - N. Balabanian : <Linear Network Analysis>, J. Wlley, 1959.
6. J. Meisel: «Princlples of Electromechanlcal Energy Conversion», McGraw-BQH, 1966.
7. D. C. IWhlte - H. H. Woodson : «Electromechanlcal Energy Conversion», J. Wiley, 1959.
8. W. J. Evans - J. O. Flower : «Derivation of Nonllnear Certain Circuit Bîquatlons», Electronics Letters (London), Vol. 3, No: 6, pp. 265, June, 1967.
9. J. P. La Salle : «Some Extentions of Liapunov's Second Method», İRE Trans. CT. pp. 502 - 527, Dec. 1960.
10. T. A. Bickart: «Flow • Graph Representation of Nonllnear Systems, İRE Trans. CT. Vol. 8, No: 1, pp. 49 - 59, March, 1961.
11. N. Şen : «Equatlons of Time-fnvariant Generalized'Electrical Netvvorks'and Their Topologlcal Solutions», TÜBİTAK 1 th Ses. Congress, Univ. of Ankara, Turkey, 4-6 Oct. 1967.