UDK : 691.3.09

Dağınık Parametrili Dinamik Sistemlerin Variyasyonel Analizi I. Transmisyon Hattı Sistemi

Yazan :
Dr. Necdet ŞEN
Universiyt of Alberta
Canada - KTÜ

ÖZET

Bu yazıda, lineer paralel çok ürtkenli bir elektrik transmisyon hattı sistemi, variyasyonel mekaniğin Hamilton Prensibi ile incelenmiştir. Bazı karışık tip enerji ve kayıp fonksiyonları tanımlanmış ve sistem modeli durum denklemleri biçimine indirgenmiştir.

SUMMARY

in this paper, a parallel linear multiconductor transmission Üne system is investlgated by Hamilton's Principle of variational mechanics. Some mixed type of energy and dissipation functions are defined and the system model is reduced into the state eguations form.

Bir sistemin davranıp ve özelliklerini bilebilmek veya istenilen bir biçime getirebilmek için o sistemin matematik yapısını (modelini), kendi ortamındaki sınır koşulları Üe birlikte bilebilmek gerekir. Böylece bir sistemin modeli, sistemin genelleştirilmiş değişkenleri uzayındaki değişkenlerin ve dış uyarımların etkisi altında, sistem elemanlarının fonksiyonel yapısmı göz önüne alarak eğ zaman bir diferansiyel denklem takımı ile belirtilirler. Hernekadar verilen bir sistemin matematik modeli, düz metotlarla bulunabilirse de karjşjık fiziksel yapılı çok değişkenli durumlarda variyasyonel hesap ve prensiplerden faydalanmak daha elveris.ll olur. Bu faydalar ilişkin özellikleri ile birkaç grupta özetlenebilir:

a. Sistematik ve birleştirilmiş, hesap : Toplu parametreli çok-değişkenll sistemlerde bu özel lik sistemin devre analogu ve izomorfik lineer grafının topolojik bağıntıları ile bağdaşır [l, 2, 3]. Dağınık parametreli sistemlerde ise karşı lıklı etki matris transformasyonları ile belirti lir [4J.

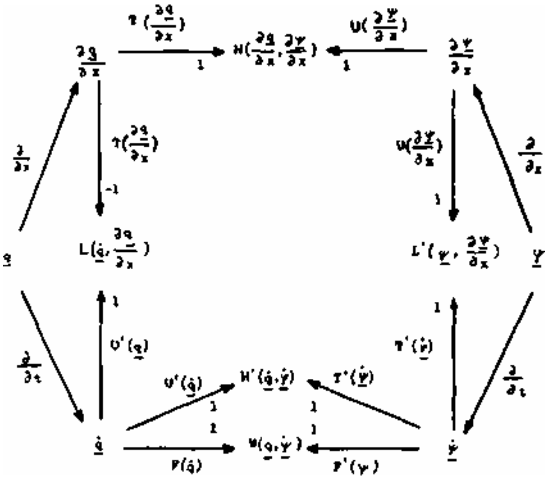
b. Variyasyonel hesabın özelliklerinden do layı, sistemin optimum işleme koşullarına iliş kin yeni sonuçlar elde ediliT. Dinamik sistem modellemesi problemlerinde bu özellik sistemin toplam minimum klnetlk-potansıyel fonksiyone linin göz önüne alınması ile, sistemin genelleşti rilmiş denge modelinin bulunmasını sağlar.

«. Matematik işlemlerde foksiyonel türevler ayni tip değişkenlerin variyasyonlannm katsayıları olarak tek parantezler içinde toplanıp eıfır veya belirli bir sınır koşuluna eşitleneceklerinden kolay ve derli toplu biçimlere girerler. Bu özellik bir takımı matris transformasyonları ile kanonik biçimlere indirgenebilirler ki bu da komputer çözümlerinde kolayük sağlar [3].

Variyasyonel metotlar sistemler teorisi ve fiziğin birçok dallarında olduğu gibi uygulamalı matematik bilimlerinin birçoklarında basan ile kullanılır [5, 6]. Bu yazıda lineer paralel çok iletkeni! bir transmisyon hattı sistemi Hamilton prensibi kullanılarak variyasyonel yoldan incelenmiştir. Bilindiği gibi bir transmisyon hattı sisteminde sistem değişkenleri îıemı zamanın hem .de hat boyunda tek yönlü uzayın fonksiyonudur. Dağınık parametrill sistemler,, transmisyon matrisi, toplu parametreli duruma indirgeme, mod-süperpozisyonu metodu, dalga denklemleri ('klasik metot), v.s. [4] ile çözülebilirse de yukarıdaki özellikleri gerçeklemeyebilirler. Bundan başka eğer verilen bir sistem, değişik özelliklerde birkaç fiziksel alt-slsteinln ara bağlantısı ile kurulu ise, tüm sistemdeki ortak bir fiziksel özellikten başlayıp belli bir kavram» benimsemekle sistemin modeli tek Işleml'e bulunur. Bu işlem, enerji kavramı ve Hamilton prensibi ile gerçekleştirilir. Hamilton prensibi uzun bir süre klasik mekanikte sakınımlı sistemler için uygulanmıştır. Sakınmışız sistemler için bu prensip kinetik-potansiyel fonksiyonuna sakınmışız kuvvetlerin virtüel iş terimini ekleyip birinci variyasyonunu sıfıra eşitlemekle sağlanmış olur. Dağınık parametreli sistemlerde bu (l)'de görüldüğü gibi yazılır.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{x} (\;.\;)dx\,dt = 0 \qquad (1)$$

Variyasyonel mekanikten bilindiği gibi bu prensip genelleştirilmiş iki grup değişken cinsinden uygulanır. Bunlar, genelleştirilmiş koordinatlar ve genelleştirilmiş momentumlardırlar. Fiziksel analojisi prensibinin genelleştirilmesi ile bu değişkenler iç-geçls, ve <uç değişkenleri diye iki asal grupta tekUlegtirilirler. Burada ilgilendiğimiz dağınık parametrili elektik sistemi için tou iki grup geneHeştiriknig değilken q yük ve , akı değişkenleri olarak Şekil l'de görüldüğü gibi birbirleri arasındaki skaler enerji-yoğunluğu fonksiyonları ile birlikte sınıflandınlabilirler.



Seldi 1.

Şekil l'de görüldüğü gibi, Lagrangien enerji yoğunluğu fonksiyonu,

ağ.

gibi tanımlanır. Sistemin lineerligi dolayısı ile bu tanımlamada ters kinetik enerji fonksiyonu

T ' (q) = T (ÖY d x) gibi yazılabilir

ve Lagrangten yoğunluğu fonksiyonu böylece

3q (3)

biçimine gelir. £ ve W skaler enerji ve kayıp yo- . günlüğü fonksiyonları n tane paralel çok iletkeni! lineer bir transmisyon hattının dk 'boyundaki parçası için Şekil 2'd'e görüldüğü gibi aşağıdaki nxn boyutlu birer kare, simetrik pozitlf-tanımlı matrisler olarak yazılırlar. C(. ve G, , R_M Herbir hattın arasında kaçak L, (burada 1=1,2,. ..,n ve j=l,2,...,n) aşağıdaki gibidirler.

L11 L12 .... in

L = L,2 L22. ....L2n

nn

C =

G 2n G-, 1n

R =

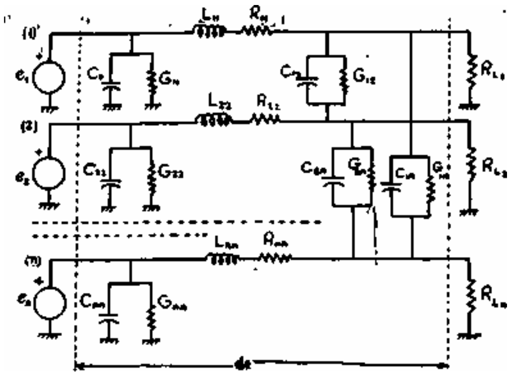
'R

G --

C	C	-•	C
U11	12 C		in . C
S2	C22		Sn
C	C		Ç
in	2 n		nn .
G11	°12		G1n
12	22		2n

(4)

Elektrik Mühendisliği 180



Şekil 2.

L ve' C, eleman'larmda £ sâkınımlı enerji-durum yoğunluğu tanımlandığı gibi, R ve G elemanları için de W kayıp yoğunluğu fonksiyonu[1]'

$$W = W (q. V-) \qquad (5)$$

biçiminde kangık bir fonksiyon olarak tanımlanır.

(l)'deki 'biçimi 'ile Hamilton Prensibinin uygulanmasf sistemin minimum sakınmışız gerek koşuluna karşılık olan denge modelini ikinci dereceden bir kısmi, diferansiyel denklem olarak verir. Böyle bir denklemin çözümündeki güçlük, (l)'deki varlyasyon indeksini özel tip bir Legendre transformasyonu ile, ikinci bir biçimde yazmakla giderilir [3]. Bu transformasyonu, bu probleme has, özel bir karışık biçimde aşağıdaki gibi yazabiliriz :,

aa A q t TA" 3x 3q- 3x) -H (q,y)
Sx

(6)

yeni bir karışık (2nxl) boyutlu | değişkenler vektörü ve (2nx2n) boyutlu bir J katsayı matrisi tanımlamakla :

(7)

ve J = J

(6) eşitliği:

-H' (j)

yazılabilir ve kayıp yoğunluğu fonksiyonu da,

(9)

olarak yazılır. Böylece (1) indeksi aşağıdaki duruma gelmiş olur.

ffr\ f.L u>-HKf)|dx dt.r rte, 5i))dxdtA), ^q(o.t) j ««»r G g.** .t)) dt
^-6 l- -J J^J0 l^af J ^ - t,

(10)

Kısmi integrasyon kuralının kullanılması ile bu Integradln terimleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

(11)

Burada varlyasyon hesabının özelliğinden ötürü.uç noktalarda: ,Cf(t) =

O r (t) = 0 d i r . Benzer biçimde ikinci ve üçüncü terimlerin integralleri de aşağıdaki

gibi bulunur :

(J t dt dx dt = (j f

"t,

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^x (- \qquad\qquad) \, dx\, dt = \int_0^x \left\{ \left(-\frac{\partial H'}{\partial \underline{\xi}}, \delta \underline{\xi}\right)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H'}{\partial \underline{\xi}}\right), \delta \underline{\xi}\right) dt \right\} dx \qquad (13)$$

(11), (12) ve (13)

integralleri (10)'da yerlerine konulursa

Jj~x , T »2

(14)

Böylece ,Euler - Lagrange denklemi çok değişkenli vektör formda transmisyon hattı sisteminin matematik modelini vermek üzere sınır kogullan ile aşağıdaki gibi bulunur :

matematik model

(15)

sınır koşulları[1]

e(t) = ' (O,t)

(16)

$R_L q(f, t)'=?(*, t)$

Açıktır ki transmisyon hattı parametrilerinin yerlerine konulmaları ile, ters Hamiltonien enerji ve kayıp (Rayleigh) yoğunluğu fonksiyonları

H'(q,v) r (Lq,q) « (Çy ,) = (I^ 0 ; q ~ , 7 Q. c f i

W = (Rq,q) * (Çy.v) = (R Q" 0 G M k • q f '

(17)

biçiminde yazılırlar. Böylece (15) ve (17) denklemlerinden :

r L Ç" "q" 0. C t "q^ f W ' 2 9 q y » E o Q." £. q f q ' İL (18)

veya akım ve gerilim değişkenleri cinsinden p .= j,/j,x operatörü ile bir kez daha :

L'1 0 -R -i"1 R; k"1 P

-'1 G

(19)

Bu denkleme dikkat edilirse kanonik biçimde durum denklemi olduğu görülür. O halde

X (i, v) = col (i, v)

durum vektörünün tanıma ile (19) denklemi (20) deki gibi yazılır :

durum modeli

X = A X (20)

Bu denklem dağınık parametreli bir durum modeli olup çözümü kaynaklarda bulunabilir [4].

Görüldüğü gibi bu yazı dağınık parametreli dinamik bir sistemin variyasyon hesabı ve prensipleri ile modelleınesine örnek olarak verilmiş, oluyor. Mühendislik ve uygulamalı bilimlerin birçok dallarında hem dağınık hem de toplu parametreli alt sistemlerin ara bağlantıları ile kurulu sistemlerde de varlyasyonel prensiplerin kullanılmaları ile sistem modeli bulunabilir. Ne var ki matematik modelin bulunması, başlangıçta verilen bir sistemin geometrik modelindeki (elektrik veya mekanik devre analog modeli) enerji biriktirici ve kaybedici elemanlarının enerji/

kayıp fonksiyonlarına dayanacağından, karışık fiziksel yapıdan olan sistemlerde önce sistemin dağınık parametreli bölümünü toplu parametreli duruma indirgemekle sistemi tüm olarak toplu parametreli gibiymiş gibi inceleyebiliriz. Şimdiye kadar bu iş, sistemler teorisinde yaklaşıklık metotları Ue yapılmışsa da, burada, bu yazmln ileri çalışması olarak, verilen sistemin dağınık parametreli parçasının önce uç-grafmı bulup, sonra toplu parametreli parçasının topolojik bir elemanı imiş gibi düşünüp modelleme problemini inceleyebileceğimizi ileri sürebiliriz.

Kullanılan gösterimler :

R, L, C, G : Birim uzunluktaki transmisyon hattı parametrilerı

f, f : Lagranjien ve ters Lagranjien enerji yoğunluğu skaler fonksiyonları H, H' : Hamiltonien ve ters-Hamiltonien enerji yoğunluğu skaler fonksiyonları

W Kayıp fonksiyonu yoğunluğu «b \ȷı Genelleştirilmiş yük ve akı değig,-~ ~~ kenleri vektörleri

(,) iki vektörün iç çarpımı

8 Variyasyon gösterilimi ^{I} | Karışık değişken vektörü X Durum değişkenleri vektörü e Gerilim kaynaklan vektörü R_T~ Yük direçleri matrisi

t, x : Zaman ve tek yönlü uzay değişkeni

p : x°e g-öre türev operatörü l: Hat uzunluğu

Kaynaklar :

1. Şen, N. - Evans, F. J.: «Formulation- för a generalized. network in terms of the Hamiltonian energy functlon». Elec. Lett. No. 4, pp. 92-93, 1970.
2. Evans, F. J. - Jooes, D. L. - Şen, N.: «Canonical formulation of variational principles in non-conservative netvvorks». PSx>c. 13th MidKvest Symp. on Gir. Theo., Univ. of Min nesota, Minneapolis, USA, May, 7-8, 1970, pp. 7.3.1-10.
3. Şen, N.: «Ph. D. Thesis», Unlversity of London, 1970.
4. Takashi, Y. - Rabins, M, J. - Auslander, D. M.: «Control and Dynamical Systems», Addison-WesIey Pub. Co., 1970.
5. Tabarrok, B.: «Complementary energy method. in elastodynamdcs>, Univ. of Toronto, Mech. Engrg.-TP 7101, Jan. 1971.
6. Weinstock, R.: «Calculus of Variations» McGraw-Hill, 1952.

BÜYÜK ELEKTRİK ŞEBEKELERİ MİLLETLERARASI KONFERANSI (CIGRE) TOPLANTISI

(CIGRE) nin 1972 senesi toplantısı 28 Ağustos - 6 Eylül tarihleri arasında Pans'te, UNESCO'nun konferanslar binasında olacaktır.

139 raporun verilmiş olduğu bu toplantıda, bundan evvelkilerde olduğu gibi. elektrik enerji şebekeleriyle ilgili teknik problemler gruplara ayrılmış olarak, müzakereler alternatörler, transformatörler, kesiciler, alternatif akım - doğru akım konvertisörleri, yalıtım maddeleri, kablolar, hava hatları, nakil şebekeleri, aşırı gerilimler, izolasyon koordinasyon korumalar ve teletransmisyon problemlerini kapsıyacaktır.

Her türlü bilgi :

CIGRE-Türkiye Merkezi
Sekreterliği
Elektrik Fakültesi
TEKNİK ÜNİVERSİTE
İSTANBUL

adresinden alınabilir.