

SAYISAL SÜZGEÇLER.

VE

Z DÖNÜŞÜMÜ

hans koffler

fert-kii". Örneklenmiş örneksel (analog) değerlerin saklanması ise zorluklar ortaya çıkarır. En zorluklar saklama süresi büyüdükçe artar. Oysa, örneklenmiş örneksel değerler sayısal (digital) biçime dönüştürülürse, hiç bir kayıp olmaksızın istenildiği kadar uzun süreler saklanabilirler. Süzme işleminin gerektirdiği toplama, çarpma gibi işlemler salt sayısal olarak kolayca gerçekleştirilebilir.

Sayısal teknoloji pek gelişmiş iken sayısal toplama ve çarpma işlemleri karmaşık ve yavaş olarak gerçekleştirilebiliyordu, bu yüzden sayısal saklamalı ama toplama ve çarpmayı örneksel olarak gerçekleştiren melez (hybrid) dizgeler kullanılıyordu.

Sayısal tümleşik devrelerin gelişmesiyle tümüyle sayısal olarak çalışan süzgeçlerin kullanımı büyük ölçüde arttı. Sayısal süzgeçlerin özellikleri iyice belirli ve kararlıdır, yinelemeye ve çok sayıda yapıma elverişlidir. Ayrıca katsayıları değiştirerek (ki bu çok kolaylıkla sağlanabilir) süzgecin geçiş (transfer) işlevi istenildiği gibi ve çabukça değiştirilebilir. Eskiden, bu, ancak belli sınırlar içinde olanaklıydı. Sayısal süzgeçler, yapıları sonucu, bilgi işlem dizgeleri ile bütünleşmiş olarak gerçekleştirilebilirler.

Sayısal süzgeçlerin öbek (block) diyagramlarının elde edilmesi için çok sayıda yöntem vardır. Biz burada yalnızca z dönüşümü ve çiftdoğrusal (bilinear) z dönüşümü yöntemlerini göreceğiz.

2. ÖRNEKLEMELİ SÜZGEÇLERİN ÖZEL BİR BİÇİMİ OLARAK SAYISAL SÜZGEÇLER

Sürekli bir imin değişmez T zaman aralıklı olarak örneklenmesi ve böylece bir dizi kesikli im değeri (örneklenmiş değerler) elde edilmesi yöntemi, iletişim mühendisliği alanında bilinen ve çok kullanılan bir yöntemdir (Şekil 1). Simgesel olarak bunu

$$f(t) \rightarrow f[nT] ; n=0,1,2,3,\dots (1)$$

biçiminde gösterebiliriz. Özgün im (original signal) örneklenmiş değerlerin zarfından bir fh en üst sıklığına (frekans) kadar kesinlikle elde edilebilir. fh sıklığı irin, peşpeşe iki örneklenmiş değer hala bir tam çevrim (cycle) içine düşmekte olmalıdır, yani,

$$f_h = 1/(2T) \text{ ya da} \quad (2)$$
$$fh = fa/2$$

olmalıdır, burada, $f_a = 1/T$, örnekleme sıklığını göstermektedir (Bu, bilinen örnekleme teoremi'dir). Örneklenmiş değerlerin dizisi, fh sıklığına kadar, özgün sürekli im'in taşıdığı bilginin aynısını taşır ve işlemler için özgün sürekli imin yerine kullanılabilir.

Örneklenmiş imin biçimi yeni işlem yöntemlerini olanaklı kılar, örneğin, Şekil 2'deki öbek diyagramından görüldüğü gibi, bir önceki örneklenmiş değer $f[(n-1)T]$, bundan bir sonra örneklenen değer olan $f[nT]$ ye eklenebilir. Elde edilen toplam

$$f_s[nT] = f[nT] + f[(n-1)T] (3)$$

yeni bir im olarak gözönüne alınabilir. $f_s[nT]$ imi üzerindeki etkisi bakımından bu toplama işlemi, $f[nT]$ iminin, kazancı olan bir alçakgeçiren süzgeçten geçirilmesine eşdeğerdir. Şekil 3'te bu durumu görüyoruz. Sıklık sıfır iken (Şekil 3a) bütün örneklenmiş değerlerin genliği aynıdır, toplamadan sonra genlik iki katına çıkar, fakat sabittir. Sıklığı $f = f_a/2$ olan bir im için (Şekil 3b) peşpeşe gelen örneklenmiş değerlerin genlikleri aynı, işaretleri farklıdır, bu yüzden toplamının sonucu sıfır olur. Demek ki bu sıklıkta süzgeç, gelen imi tüm den durdurmaktadır. Sıklığı bu iki uç değer (sıfır ve $fa/2$) arasında olan imler, sıklık arttıkça daha fazla olmak üzere, zayıflatılır. Şekil 3c'den bu süzgecin ilginç bir özelliği ortaya çıkmaktadır. İm sıklığı örnekleme sıklığına eşit olunca, örnekleme sonucu sabit genlikli değerler olmakta ve süzgecin çıkışı, sıfır sıklıklı giriş imi için aldığı biçimi almaktadır. Demek ki bu süzgeç $f = 0$ sıklıklı ve $f = f_a = 1/T$

1. Giriş

Sürekli bir imin (signal) peşpeşe örneklenen (sampled) değerlerini sürmek için kullanılan süzgeçlere örneklemeli süzgeç diyoruz. Süzülecek örneklenmiş değerlerin saklanması

Dr. Hans Koffler, Siemens AG,
Zentrallaboratorim für Nadi-
richtentechnik

sıklıklı giriş imlerini ayırde-
detnez.

Süzgecin geçirme bandı $f = 0$ da-
dır, $f = f_s/2$ sıklığını durdu-
rur; $f = f_s$ için yine geçirme
bandı ortaya çıkar, ve bu çev-
rim peşpeşe yinelenir (Şekil 4).
Böyle süzgeçlere tarak süzgeç
(comb filter) deriz. Bütün ör-
neklemeli süzgeçler tarak süz-
geci özelliği gösterirler¹.

Süzgecin sıklık tepkisi duyar-
lıklı olarak ayarlanabilir (Şe-
kil 2). Bir önceki örneklenmiş
değer olan $f = [(n-1)T]$ nin elde
edilmesi için, örnekleme ara-
lılığı T kadar geciktirilmesi ge-
reker.

Yayıma süresi T olan ideal
bir geciktirme devresinin
geçiş işlevi

$$H_L(s) = e^{-sT} \quad (4)$$

ya da, kalıcı durum (steady
state) için

$$H_L(\omega) = e^{-j\omega T} \quad (5)$$

dir. Burada $s = a + ju$, karmaşık
sıklığı (complex frequency)
gösterir. Bu durumda süzgecin
geçiş işlevi

$$H(\omega) = 1 + e^{-j\omega T} \quad (6)$$

ya da

$$|H(\omega)| = |1 + e^{-j\omega T}| = 2 \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right|, \quad (7)$$

$$|H(f)| = 2 \left| \cos(\pi f T) \right|,$$

$$f = 1/T$$

olur. Süzgecin dönemsel olma
(teriodicity) özelliği (tarak
İtyelliği) kosinüs işlevinden
ötürü açıkça görülmektedir.
Şekil 4'te $|H(f)|$ işlevi (7 e-
fittliği) görülmektedir. Görül-
düğü gibi, süzgeç kesim eğimi
ifce az olan bir alçak geçi-
tin süzgeçtir.

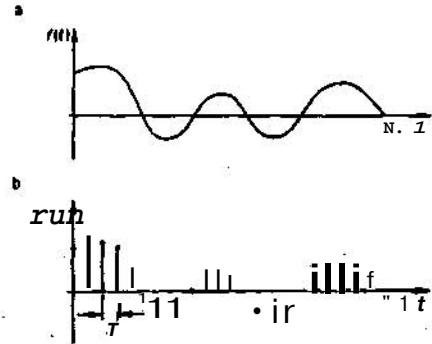
Şikll 2'deki süzgeç bir Brnek-
lmeli süzgeçtir. Bu süzgeç,
ancak, örnekleme devresinin
arkasına bir ömekselden sayı-

Genellikle bu tarak süzgeci
özelligi istenmeyen bir özel-
liktir. Radar'da, televizyon-
da, vuruş kod bindiriminde
(Pulse code modulation, PCH),
örneklenmiş veri denetim diz-
gelerinde ise bu özellik is-
tenen bir özelliktir.

Şekil 1.

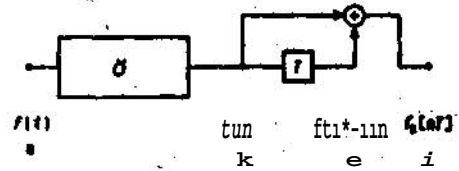
Süreklî bir imin
örnekleme.

(a) süreklî im,
(b) örneklenmiş im.
Örnekleme sıklığı
 $f_s = 1/T$



Şekil 2.

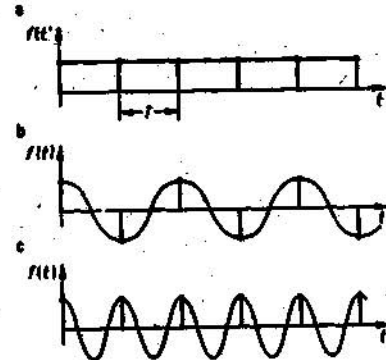
Yalın bir ömekseldeli
süzgeç, -(a) süreklî
(ömekseldeli) im,
(b) örneklenmiş im,
(c) T süresi kadar
geciktirilmiş im,
(d) süzgecin, çıkışındaki
İM. öt örnekleme devresi
ve Ömekseldeli sayısala
çevirici.



Şekil 3.

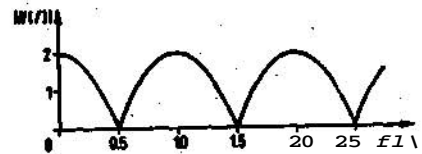
İM sıklığı ve örnekleme
sıklığı.

(a) İM sıklığı $f_s \ll 0$,
(b) İM sıklığı örnekleme
sıklığı olan $f_s = 1/T$ niç
yarışına eşit,
(c) İM sıklığı örnekleme
sıklığına eşit.



Şekil 4.

Şekil 2'deki süzgecin
geçiş işlevinin genliği.



1 sala çevirici (analog-to-digital converter) konursa bir sayısal süzgeç olur. Böylelikle, özgün sürekli im örneklenir, kuvantize edilir ve sonra sayısalallaştırılır (digitized). Şimdi artık bir dizi örneklenmiş i değer yerine belli uzunlukta ; (örneğin 10 bit uzunlukta) sayısal sözcüklerden (digital words) kurulmuş bir dizi eide edilir.

Her sayısal sözcük (im sözcüğü), büyüklüğü özgün imin örneklenmiş değerine pratik olarak eşit olan bir sayıyı gösterir. T süresi kadar geciktirilecek yerde, sayısal sözcük bu süre kadar saklanır. Toplama da sayısal olarak gerçekleştirilir. Elde edilen sayısal sözcük sonradan sayısal örneksele çevirici ile (digital-to-analog converter) örneksele çevrilebilir, ama görüldüğü gibi temel işlemler sayısal olarak gerçekleştirilmektedir.

Sayısal saklama (storage) hiç kayıpsız olarak istenildiği kadar uzun süreler için kolaylıkla gerçekleştirilebilir, örneksele yöntemlerde ise, örneksele saklama'nın zorlukları nedeniyle sınırlamalar ortaya çıkar, örneğin birkaç Hz'de çalışacak süzgeçler için saniyeler dolayında gecikmeler elde edilemez, öte yandan hızlı aritmetik birimler sayesinde, sıklık bandı 10 MHz dolayında kadar olan sayısal süzgeçler, ekonomik olarak gerçekleştirilebilir.

3. z DÖNÜŞÜMÜ YOLUYLA SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI

Örneklenmiş imlerin işlenmesine ilişkin hesaplarda z dönüşümünün çok kolaylıklar sağladığını biliyoruz, [1,2,3,4]. z dönüşümünün temel parametre-

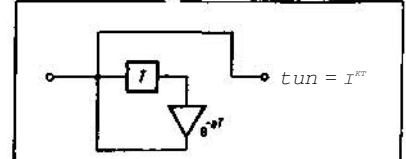
si T süresi kadar ideal im gecikmesidir, bunu simgesel olarak şöyle gösteririz:

$$z^{-1} = e^{-sT} \quad (8)$$

z dönüşümü örneklenmiş imin zamana göre ve işlem süresince değişimini z-1 in rasyonel kesirli işlevi olarak belirler. Fiziksel olarak anlamlı devreler için bu işlevde payın (z-1 cinsinden) derecesi paydanın derecesine eşit ya da ondan küçüktür. Zaman işlevi ve ona karşılık gelen z dönüşümü, Laplace dönüşümü için olduğu gibi, dönüşüm çiftleri halinde tablolarla verilir.

Tablo 1'de, sırayla, zaman işlevi, karşılık gelen Laplace dönüşümü, T süreyle örneklenmiş kesikli zaman işlevi ve karşılık gelen z dönüşümü iki örnek için verilmiştir.

z dönüşümü yineli bir formülle verilir, öyle ki, bunu ardarda kullanarak, ilgili örneklenmiş zaman işlevinin peşpeşe değerleri (genlikleri) elde edilir. Yineli formül bir öbek diyagramı olarak gösterilebilir. Şekil 5'te $f[nT] = e^{-anT}$ i öbek diyagramı gösterilmiştir. Başlangıçta, bir kez için, 1 değeri girişe verilir. Pay'da bulunan 1 katsayısı imin doğrudan çıkışa iletilmiş olduğunu göstermektedir. Fayda ise geribesleme döngüsünü (feedback loop) belirler; z-1, değer T süresi kadar saklanacağını gösterir, yani alınmış olan im bu T süresinin sonunda e^{-aT} ile çarpılır ve çarpım sonucu çıkışta belirir, ikinci bir T süresi sonunda bu çıkış yeniden e^{-aT} ile çarpılır. Sonuçta ortaya çıkan kesikli değerler dizisi Şekil 6'da görülmektedir, öbek diyagramının yalınlığı e işlevinin fiziksel öneminin bir belirtisidir.



Şekil 5.

e^{-naT} ($n=0,1,2,\dots$) kuralına göre azalan örneklenmiş değerlerin üretilmesi. Başlangıçta girişe bir kez 1,00 değeri verilir.

3.1. z Dönüşümüyle Alçak Geçiren Süzgeç Tasarımı

Bir direnç ve bir sığaçtan oluşan bir örneksel süzgecin dürtü (impulse) tepkesinin alçakan bir üstel işlev olduğunu biliriz. Şekil 5'teki öbek diyagramındaki giriş de birim dürtüdür. Buradan, bu öbek diyagramından bir alçakgeçiren sayısal süzgeç elde edilebileceği anlaşılır. Benzer biçimde, Tablo 1'in 2. satırından bir sayısal rezonatör (bant geçiren süzgeç) oluşturmak olanaklıdır, bunu ilerde göreceğiz.

Şekil 7'de sayısal alçakgeçiren süzgeç görülmektedir, t-, ve D sayısal çarpma birimlerinin katsayılarıdır. Bir kez alındıktan sonra, bir im, değeri her seferinde değişerekten geribesleme döngüsünde sürekli döner. Böyle bir süzgece yineli (recursive) süzgeç denir. Şekil 2'deki süzgeç yinesizdir (non-recursive). Öbek diyagramı, bir bilgi işleme dizgesinde programlanabilecek bir algoritma gösterir. Böylece programlanmış bilgi işleme dizgesi sayısal bir süzgeç olarak çalışır. Yalnızca donanımdan (hardware) oluşan bir gerçekleştirim de, öbek diyagram model alınarak yapılabilir.

zaman işlevi	Laplace dönüşümü	kesikli zaman işlevi	z dönüşümü
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-anT}	$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$
$e^{-at} \cos u t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + u^2}$	$e^{-anT} \cos(u nT)$	$\frac{1-e^{-aT} \cos u T z^{-1}}{1-2e^{-aT} \cos u T z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}$

Tablo 1

Kesim sıklığı, D katsayısı ile saptanır. Tablo 1'deki Laplace dönüşümü kesim sıklığını

$$U) + w_0 = 2\pi f_0 = a \quad (9)$$

olarak verir. Örnekleme sıklığı $f = 1/T$ ye normalize ederek, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$D = e^{-aT} = e^{-\omega_0 T} = e^{-2\pi f_0 / f_a} \quad (10)$$

$$A = 1 - e^{-2\pi f_0 / f_a} = 1 - D \quad (11)$$

$$f_a = 1/T \quad (12)$$

Süzgecin z düzlemindeki (dönüşümden sonraki) geçiş işlevi Şekil 7'den

$$H(z^{-1}) = A \frac{1}{1 - D z^{-1}} \quad (13)$$

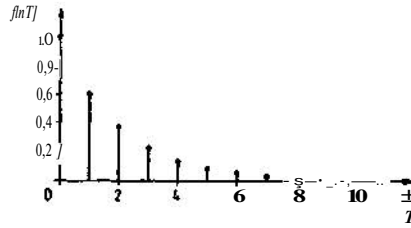
olarak elde edilir. A katsayısı sıfır sıklıkta kayıp olmasın (geçiş işlevinin genliği 1'e eşit olsun) diye konmuştur. 13 eşitliğinden, kalıcı durum için sıklık tepkesinin «enlik ve evresini (faz) bulabiliriz. Burada

$$z^{-1} = e^{-sT} \rightarrow e^{-j\omega T} = e^{-j2\pi f / f_a} \quad (U)$$

ve buradan,

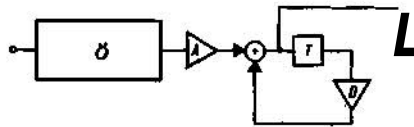
$$H(f/f_a) = A \frac{1}{1 - D e^{-j2\pi f / f_a}} \quad (15)$$

yazılabilir. Alçakgeçiren süzgecin kesiti sıklığı f_0 'ın 0,05 f_a olması isteniyorsa, $A = 0,27$ ve $D = 0,73$ olması gerektiği bulunabilir. Bu değerler için tepkenin zayıflama ve evre eğrileri Şekil 7'de görülmektedir, $f = 0,5 f_a$ için en büyük zayıflama (16 dB) elde edilmektedir, $f = 0,5 f_a$ dan sonra zayıflama eğrisi $f = f_a$ ya kadar bakışlı (simetrik) olarak düşmektedir. Bütün sayısal süzgeçlerin ortak özelliği olan tarak özelliği Şekil 8'de açıkça görülmektedir. Şekil 8'de birinci aşamadan (first-order) aynı kesim sıklıklı örneksel bir alçakgeçiren süzgecin (R-C süzgeç) zayıflama eğrisi de gösterilmiştir. Sayısal süzgecin faz eğrisi de dönemlidir (periyodik) [dönem (periyot), $f = f_a$ dır], ve $f = 0,5 f_a$ ya göre devrik bakışlıdır.



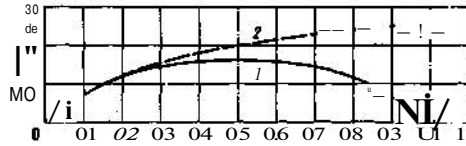
Şekil 6.

Şekil 5'teki devrede üretilen örneklenmiş değerler dizisi e^{-aT^n} , $n=0,1,2,\dots, e^{-aT^*} 0,607$.



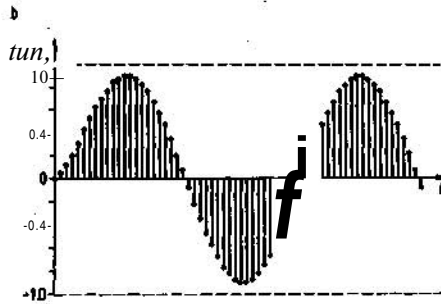
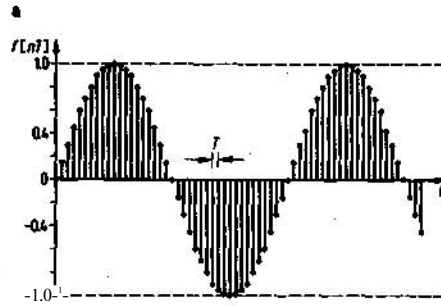
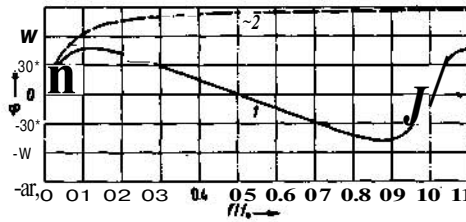
Şekil 7.

Birinci aşamadan sayısal alçakgeçiren süzgeç (Standart z dönüşümü) örnekleme devresi ve örnekselden sayısal çevirici.



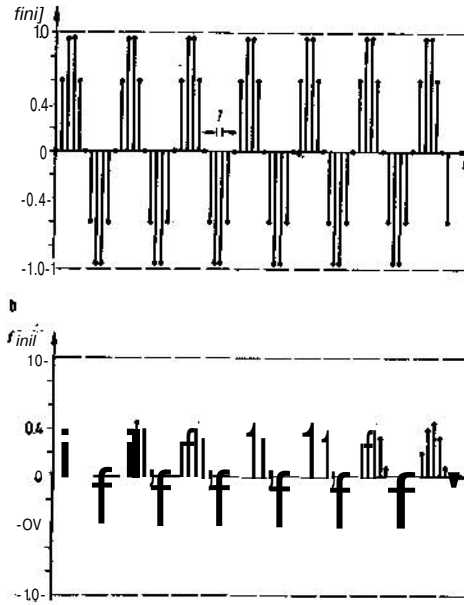
Şekil 8.

Birinci aşamadan sayısal alçakgeçiren süzgeç (Şekil 7). Zayıflama tepkesi $an^* > -20 \log |ü|$ ve evre tepkesi $4\pi f / f_a$. (1) sayısal süzgeç, (2) örneksel (R-C) süzgeç. Kesim sıklığı $f_0 = 0,05 f_a$, $f_a = 1/T > A = 0,270i$, $D = 0,730$.



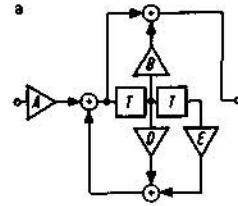
Şekil 9.

Sayısal alçakgeçiren süzgecin (Şekil 7,8) geçirme bandında bir sıklıktaki (kesim sıklığı yarı) sinüs biçimli ime tepkesi, (a) giriş, (b) çıkış.



Şekil 10.

Sayısal alçakgeçiren süzgecin (Şekil 7) durdurma bandında bir sıklıktaki (kesim sıklığının iki katı) sinüs biçimli ime tepkesi.
(a) giriş, (b) çıkış.

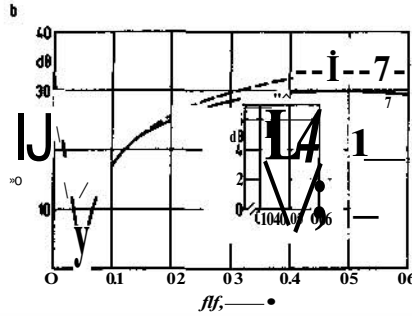


Şekil 11.

Sayısal bant geçiren süzgeç (rezonatör), standart z dönüşümü.

(a) öbek diyagramı, $\text{res} = 0,05 f_a >$ bant genişliği $= 0,01 f_a$ örnekleme sıklığı $f = 1/T$. $A=0,060$ $B=0,951$ $D=1,844$ ve $E=-0,940$.

(b) Zayıflatma (a_n) eğrisi, (1) sayısal süzgeç, (2) ömeksal süzgeç (L-C rezonans devresi).



$$H(z^{-1}) = A \frac{1+Bz^{-1}}{1-Dz^{-1} - E z^{-2}} \quad (16)$$

$$A = (1 - e^{-aT}) \quad (1 + e^{-aT})$$

$$B = -e^{-aT} \cos \omega_r T$$

$$D = 2e^{-aT} \cos 2\omega_r T / f_a$$

$$E = -e^{-2aT}$$

$$b = a/ir$$

Burada $f_a = 1/T$ örnekleme sıklığı ve $f_r = \omega_r / 2\pi$ ise rezonans sıklığıdır; b katsayısı 3 dB bant genişliğidir. A katsayısı süzgecin rezonanstaki kaybını 0 dB olarak ayarlar. Rezonans sıklığına yalnızca B ve D katsayılarının etkisi vardır.

Şekil 11'de süzgecin öbek diyagramı ve zayıflama eğrisi görülmektedir, bu süzgeçte $f_r = 0,05 f_a$ alınmıştır. İkinci aşamadan bir süzgeç olduğundan iki tane T gecikmesi (saklama) vardır. Kesikli eğri, rezonans sıklığı ve bant genişliği aynı olan bir ömeksal rezonans (L-C) devresine ilişkindir. Rezonans sıklığının yakınlarında iki eğri üstüstedir. Şekil 12'de, girişine rezonans sıklığında bir sinüs biçimli im uygulanmış sayısal süzgecin çıkışı görülmüyor. Bant genişliğinin dar olması yüzünden, çıkış iminin (zarf) tam değerine yükselmesi bir kaç çevrim almaktadır.

Sayısal rezonans "devre"si, (16) daki bant genişliği b sıfır olduğunda, yani $e^{-aT} = 1,00$ olduğunda bir sayısal osilattör (kosinüs üretici) olur. Şekil 13'te öbek diyagram görülmektedir. Çıkışın sıklığı

$K = \cos bT$ katsayısı ile saptanır. Başlangıçta girişe bir kez 1,00 değeri uygulanmalıdır.

Böyle bir osilattör sayısal süzgeçlerin sınılanması için çok uygun bir üreteç olarak kullanılabilir.

3.3. z Dönüşümünün Üstünlükleri ve Sakıncaları

Yalın sayısal süzgeçler z dönüşümü yoluyla kolaylıkla elde edilebilirse de karmaşık sayı-

Şekil 9'da süzgecin, sıklığı geçirme bandında olan (kesim sıklığının yarısı sıklıkta) bir sinüs biçimli girişe tepkesi görülmektedir. Tepkenin ilk yarım çevrimi girişinden biraz uzun sürmektedir (geçici). Çıkışla giriş arasında bir evre (faz) kayması ortaya çıkmaktadır. Şekil 8'den de görüldüğü gibi bir miktar da zayıflama olmaktadır. Çıkıştaki kesikli değerlerin zarfından sinüs biçimli im başarıyla elde edilebilir.

Şekil 10'da süzgecin, sıklığı durdurma bandında olan (kesim sıklığının iki katı sıklıkta) bir ime tepkesi görülmektedir. Geçici rejim bir çevrim kadar sürmektedir. Çıkıştaki im genliği iyice zayıflatılmıştır.

3.2. z Dönüşüm Uyle Bant Geçiren Süzgeç Tasarımı

Tablo 1'deki sönümlü kosinüs işlevinden bant geçiren süzgeç tasarımı yapılabilir. Geçiş işlevi şöyle belirlenir.

sal süzgeçlerin tasarımında z dönüşümü kullanmak zorlaşır, çünkü bu durumda z dönüşümü, geçiş işlevi H(s) in tümünden elde edilmek durumundadır. Geçiş işlevi, bu amaçla, önce kısmi kesirlerine (partial fraction) ayrılmalıdır, bu da yorucu bir işlemdir, ancak bundan sonra z dönüşümü tabloları kullanılabilir. Kısmi kesirlere karşılık gelen yalın süzgeçler paralel bağlanarak istenen süzgeç elde edilir.

Geçiş işlevi çarpanlarına dönüştürüldükten sonra z dönüşümü, artık, çarpanlara ve ardarda (kaskad) bağlanmış yalın süzgeçlere tek tek uygulama olanağı yoktur. Bu durumda, özgün (original) geçiş işlevinden sapmalar süzgecin aşaması (order) yükseldikçe artar.

İstenen sayısal süzgecin, yalın süzgeçleri ardarda bağlamak yoluyla tasarlanması çiftdoğrusal (bilinear) z dönüşümü kullanılarak gerçekleştirilebilir.

4. ÇİFTDOĞRUSAL z DÖNÜŞÜMÜ YOLUYLA SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI

Çiftdoğrusal z dönüşümü yöntemi, tasarlanması istenen süzgecin H(s) geçiş işlevinden yola çıkar. Bu işlevde s yerine z-1 koyarız. Çarpımlar yapıldıktan sonra z-* cinsinden bir kesirli rasyonel işlev elde edilir: H(z-1). Bu işlevden sayısal süzgecin öbek diyagramı doğrudan doğruya elde edilir. Yani çiftdoğrusal z dönüşümü yönteminde dönüşüm tablolarına gerek duyulmaz [5,6].

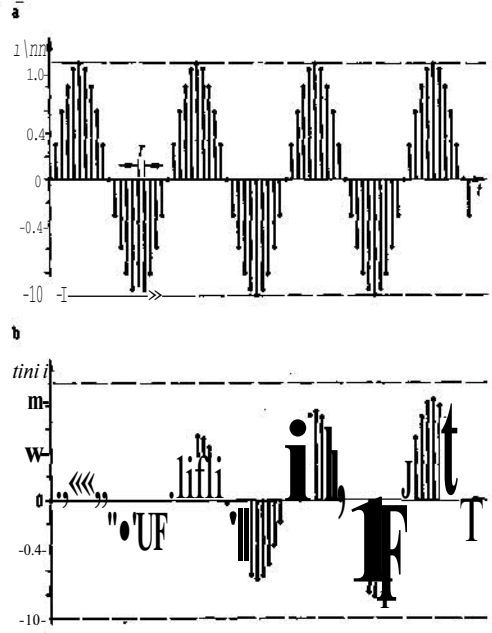
H(s), toptan dönüştürülebilir (kanonik biçim) ya da çarpanları aracılığıyla ardarda bağlanmış yalın süzgeçlere dönüştürülür. Bundan sonra her yalın süzgeç ayrı ayrı belirlenir. Ortaya çıkan süzgeç elde edilmek istenen transfer işlevine sahiptir, bir tek şu farkla: Çiftdoğrusal z dönüşümünden ötürü doğrusal olmayan bir «ıklık kayması ortaya çıkmıştır.

4.1. Çiftdoğrusal z Dönüşümünde Dönüşüm Formülü

Dönüşüm formülünü Şekil 14'teki

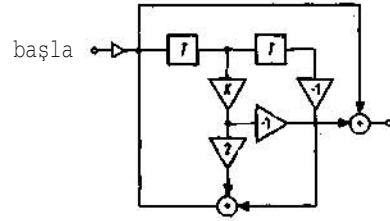
Şekil 12.

Sayısal bantgeçiren süzgeç (Şekil 11), rezonans sıklığında. (a) girişi, (b) çıkışı imi.



Şekil 13.

Sayısal üreteç. Üretilen im: $f[n] = \cos(n^2 \pi f_0 / f_s)$ / $n=0,1,2,3,\dots / f_s=1/T$. Üretilen imin sıklığı f_0 . Başlangıçta girişe bir kez 1,00 değeri verilir.



gösterilim yardımıyla elde edeceğiz. Bu şekilde, örnek olarak bir örneksel yüksekgeçiren süzgeç (sıklık: f) ile bir sayısal yüksekgeçiren süzgeç (sıklık: f*) in zayıflatma eğrileri görülmektedir. Sayısal süzgeçte, tarak özelliği her zaman olduğu gibi, yine vardır. Tarak özelliği f=0 ı f*=0 ile ve f=« u f*= 1/(2T) ile eşleyerek (mapping) ve yarım çevrim'in bakışımı olmasını, ve tam çevrim'in sürekli olarak yinelenmesini sağlayarak elde edebiliriz. Bu eşleme tanjant işlevi ile elde edilir:

$$2\pi fT/2 = \tan(2\pi f^*T/2) \quad (17)$$

ya da, $2\pi f = u$, $2\pi f^* = w^*$ koyarak,

$$w = -f - \frac{*}{\tan} \frac{T}{2} \quad (18)$$

17 eşitliği Şekil 15'te görülmektedir. Karmaşık sıklık s için şu yazılabilir:

$$s = \sigma + j\omega = \sigma + j \frac{2}{T} \tan \frac{w^* T}{2} \quad (19)$$

$$\tan \frac{x}{2} = -j \frac{1 - e^{-jx}}{1 + e^{-jx}} \quad (20)$$

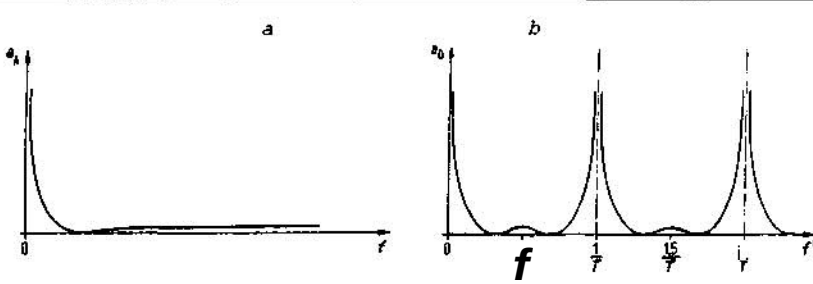
yardımıyla ve kalıcı durum (a=0) için,

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (21)$$

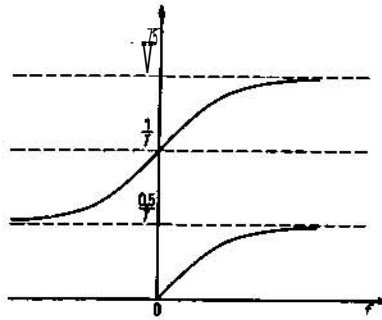
$$z^{-1} = (e^{-sT}) = e^{-j\omega^* T}$$

elde edilir, s nin (21) ile verilen değeri H(s) de yerine konarak H(z-1) elde edilir, bundan da sayısal süzgecin öbek diyagramı bulunur.

Çiftdoğrusal z dönüşümünün böyle zahmetsizce kullanılabilmesi (17) ile verilen sıklık dönüşümünün sonucudur. Şekil 16a'da sürekli bir imin genlik yoğunluk tayfı (spektrum), s(f) görülmektedir. İdeal örneklemeden sonra, gen-



Şekil 14. YUKsekgeçiren bir süzgecin zayıflatma eğrisi.
(a) Özgün (orjinal) sıklık bandı (ömeksel süzgeç, zayıflatma $a^$),
(b) Eşleme'den (çiftdoğrusal z dönüşümünden) sonra.



Şekil 15.
Çiftdoğrusal z dönüşümünde sıklık kayması, özgün sıklık f , eşlenen sıklık f^* (17. eşitlik).

lik yoğunluk tayfı örnekleme sıklığı $f_s = 1/T$ kadar aralıklarla yinelenen bir işlemdir. Böylece örnekleme sıklığının değerinin düşük olduğu düşünülürse, tayflar istenmeyen bir biçimde üstüste binerler (Şekil 16b). Çiftdoğrusal z dönüşümü bu üstüste binmeyi yaratmaz (Şekil 16c), çünkü \rightarrow dan $+\infty$ a kadar sıklık bölgesi $-1/(2T)$ den $1/(2T)$ ye kadar olan sıklık aralığına dönüştürülmüştür. Ancak bundan sonra çevrimsel yinelenmeler ortaya çıkar.

4.2. Çiftdoğrusal z dönüşümünün kullanılması

Çiftdoğrusal z dönüşümünün kullanılması kolaydır. Birinci aşamadan alçakgeçiren bir süzgecin karmaşık transfer işlevi şöyledir:

$$H(s) = \frac{1}{s/w_0 + 1} \quad (22)$$

Burada ω_0 kesim sıklığıdır, özgün bölge (f) ile eşleştirilen bölge (f^*) arasındaki doğrusal olmayan ilişkiden dolayı sayısal süzgecin kesim sıklığı istenen değerden farklı bir değer

alır. Bunu önlemek için, kesim sıklığı ω_0 'ı öte yana doğru değiştiririz, böylece ω_0 elde edilir:

$$\omega_0 + \omega_0' = 4 \tan \frac{\omega_0 T}{2} \quad (23)$$

(21) eşitlikleri şimdi şöyle olur:

$$\frac{S}{\omega_0} \rightarrow S = \frac{1}{g} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (24)$$

$$g = \tan \frac{\omega_0 T}{2} = \tan \frac{\pi f_0}{f_s} \quad (25)$$

$$f_s = 1/T$$

(24) eşitliğini (22) ye koymakla $H(s)$, $H(z^{-1})$ e dönüştürülür:

$$H(z^{-1}) = A \frac{1+Bz^{-1}}{1-Dz^{-1}} \quad (26)$$

$$A = g/(1+g), \quad B = 1,$$

$$D = (1-g)/(1+g)$$

Şekil 17'de öbek diyagramı görülmektedir. Paydadaki D katsayısı geribesleme döngüsünü oluşturur. Standart z dönüşümü ile

karşılaştırıldığında, burada fazladan bir B katsayısı (alçakgeçiren süzgeç için $B = 1$), bir de toplayıcı vardır. Kesim frekansı $f_0 = 0,05 f_s$ alınır; $A = 0,138$; $B = 1$ ve $D = 0,727$ bulunur. Şekil 18'de bu süzgeç için sıklığın işlevi olarak zayıflatmanın genlik ve evre (faz) görülmektedir. Kesikli çizgi ile gösterilen eğriler birinci aşamadan örneksel süzgeç (R-C alçak geçiren süzgeç) içindir. (17) eşitliğiyle verilen dönüşümden ötürü, geçiş işlevinde $t/f_s = 0,5$ te bir sıfır oluşmaktadır, bu sıklık için zayıflatma enbüyük değerine ulaşmaktadır. $f/f_s = 0,5$ e kadar her iki süzgecin evre tepkeleri birbirine çok yakındır. Standart z dönüşümüyle elde edilen süzgecin evre tepkesi (Şekil 8) örneksel süzgecin bu kadar uygunluk göstermiyordu.

Birinci aşamadan yüksekgeçiren süzgeç için geçiş işlevi şöyledir:

$$H(s) = \frac{1}{\omega_0/s + 1} \quad (27)$$

Çiftdoğrusal z dönüşümüyle (24) eşitliği) 17. Şekildeki öbek diyagramının aynısını elde ederiz, ama bu kez katsayılar şöyle olur:

$$A = 1/(1+g), \quad B = -1,$$

$$D = (1-g)/(1+g) \quad (28)$$

Görüldüğü gibi alçakgeçiren süzgece göre yalnızca A'nın büyüklüğü ve B'nin işareti değişmiştir. Demek ki alçakgeçirene ayısal bir süzgeç kolaylıkla yüksekgeçiren süzgece çevrilebilir. Katsayılar yardımıyla her kesim sıklığı elde edilebilir. Sayısal süzgeçlerin örneksel süzgeçlere en büyük üstünlüğü buradadır: Hızla ve kolaylıkla istenen işleme uydurulabilirler, yani uyarlamalıdır (adaptif).

Yukarıda anlatılan yüksekgeçiren süzgeç için, eğer kesim sıklığı $f_0 = 0,05 f_s$ olarak seçilmişse, $A = 0,863$; $B = -1$ ve $D = 0,727$ olarak bulunur.

4.2.1. Çiftdoğrusal z Dönüşümü ve Yüksek Aşamadan Süzgeçler

Çiftdoğrusal z dönüşümünü (24) eşitliği) yine yazalım:

$$s = \frac{1}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (29)$$

$$g = \tan \frac{\omega_0 T}{2}$$

Bir Butterworth, Çebişef ya da Cauer geçiş işlevinin gerçek kutbu için

$$H(s) = a \frac{1}{s^2 + \omega_0 s + a} \quad (30)$$

elde edilir; z dönüşümü genel biçimiyle

$$H(z^{-1}) = A \frac{1 + Bz^{-1}}{1 - Dz^{-1}} \quad (31)$$

Şekil 31 eşitliği için öbek diyagramı Şekil 17'de gösterildiği gibidir.

Butterworth ya da Çebişef'deki bir karmaşık eşlenik (complex conjugate) kutup çifti için

$$H(s) = (a^2 + b^2) \frac{1}{(s/a + a)^2 + b^2} \quad (32)$$

ve Cauer'deki sıfırlı bir eşlenik kutup çifti için

$$H(s) = (a^2 + b^2) \frac{1 + 3^2 C}{(s/u + a)^2 + b^2} \quad (33)$$

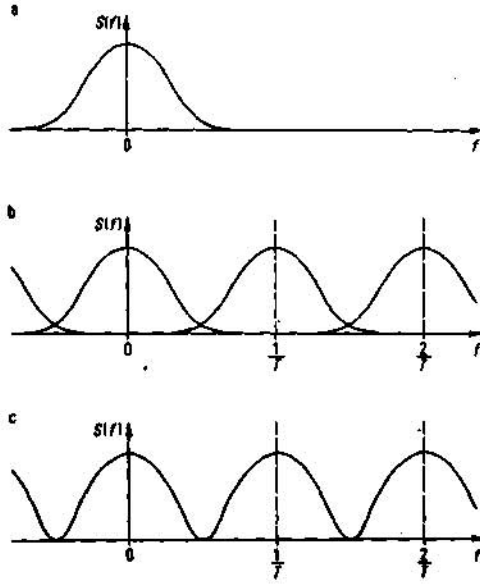
İşlevleri, genel biçimi

$$H(z^{-1}) = A \frac{1 + Bz^{-1} + Cz^{-2}}{1 - Dz^{-1} - Ez^{-2}} \quad (34)$$

olan bir z dönüşümüne sahiptir, bunun öbek diyagramı Şekil 19'da gösterilmiştir.

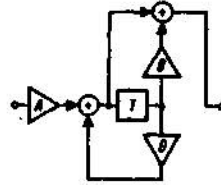
İkinci aşamadan Çebişef alçak geçiren süzgeci için; $f_0 = 0,05 f_a$ ve $e = 0,5$ seçilmişse, $A = 0,023$; $B = 2$; $C = 1$; $D = 1,614$ ve $E = -0,708$ bulunur. Zayıflama tepkesi Şekil 20'de gösterilmiştir.

Benzer özellikli ikinci aşamadan Cauer alçakgeçiren süzgeci için; $f_0 = 0,05 f_a$ ve durdurma bandı zayıflatması $f = 0,5 f_a$ da 35 dB seçilmişse, $A = 0,038$; $B = 0,467$; $C = 1$; $D = 1,614$ ve $E = -0,708$ bulunur. Çebişef'e göre yalnızca A ve B katsayıları farklıdır. Bu süzgecin zayıflatma tepkesi de Şekil 20'de gösterilmiştir.



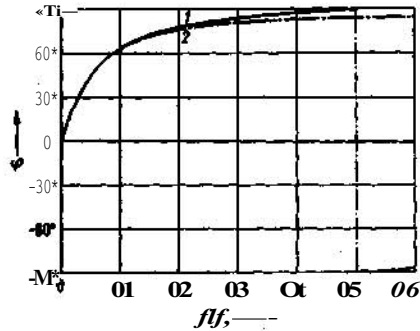
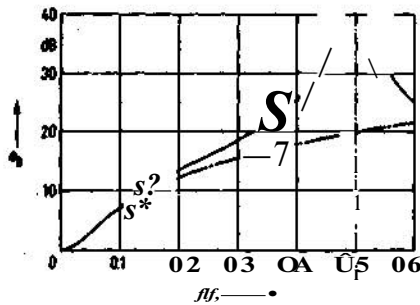
Şekil 16.

Genlik yoğunluk tayfı $S(f)$.
(a) sürekli im,
(b) örneklemeden sonraki im, binişmeden (overlapping) ötürü hata ortaya çıkıyor,
(c) çiftdoğrusal z dönüşümünden sonraki örneklenmiş im, binişim yok.



Şekil 17.

Birinci aşamadan sayısal süzgeç, çiftdoğrusal z dönüşümü, öbek diyagramı.

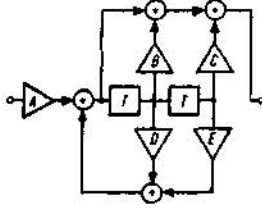


Şekil 18.

Birinci aşamadan sayısal alçakgeçiren süzgeç, çiftdoğrusal z dönüşümü, kesim sıklığı $f_0 = 0,05 f_a$, $f_s = 1/T_s$ $A = 0,138$ $B = 1$ $WB 13 = 0,727$ (Şekil 17). (1) sayısal süzgecin, (2) örneksel süzgecin (R-C süzgecin) tepkeleri.

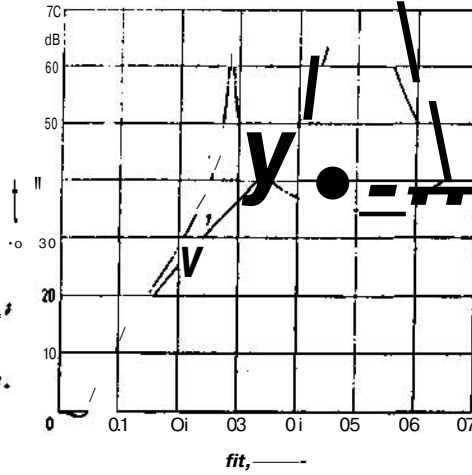
Şekil 19.

İkinci aşamadan sayısal süzgeç, çiftdoğrusal z dönüşümü, öbek diyagramı.



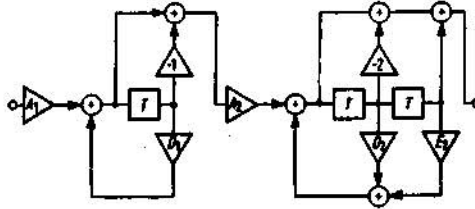
Şekil 20.

İkinci aşamadan sayısal süzgeçler, çiftdoğrusal z dönüşümü; zayıflatma a^n nin normalize sıklık f/f_s ya göre değişimi. Kesim sıklığı $f_c=0,05 f_s$, $f_s=1/T$. (1) Çebişef $f=0,5/ A=0,023/ B=2, C=1 > D=1,614$ ve $E=-0,708$. (2) Caer $A=0,038; B=0,467/ C=1 > D=1,614$ ve $E=-0,708$.



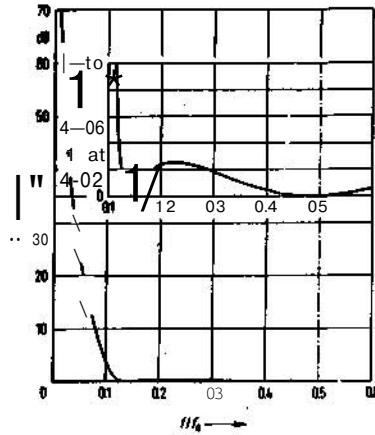
Şekil 21.

Sayısal yüksekgeçiren süzgeç (Çebişef üçüncü aşamadan).



Şekil 22.

Şekil 21'deki süzgecin zayıflatması a_n nin sıklığa göre değişimi. Kesim sıklığı $f_c=0,1 f_s > f_s/T$ $E=0,25$. Çiftdoğrusal z dönüşümü/ $A_1=0,646/ A_2=0,732, D_1=0,292 > D_2=1,273$ ve $E_2=-0,653$



Anlatılan bu yalın süzgeçler bir araya getirilerek istenen karmaşıklıkta süzgeçler elde edilebilir. Şekil 21'de üçüncü aşamadan bir Çebişef yüksek geçiren süzgeci gösterilmiştir. Bu süzgecin kesim sıklığı $f_c=0,1 f_s$ ve $E=0,25$ tir. Şekilden de görüldüğü gibi, bu süzgeç ardarda bağlanmış bir birinci bir de ikinci aşamadan iki süzgeçten oluşmuştur. Şekil 22'de bu süzgecin zayıflatma tepkisi görülmektedir.

Yukarda belirtilen üçüncü aşamadan süzgeç için, üçüncü aşamadan $H(s)$ işlevinin çiftdoğrusal z dönüşümünü bularak da öbek diyagramına geçilebilirdi. Bu durumda süzgecin bir gerçek (real) kutupla bir eşlenik kutup çiftinden oluşmuş biçimde olduğu açıkça görülmezdi ama böylece elde edilen kanonik gerçekleştirme en küçük sayıda devre ögesi ile sağlanmış olurdu. Bununla birlikte bu süzgeçlerde kararlılık, sonlu hesaplamadan ötürü ortaya çıkan yuvarlama yanlışları (round-off error) gibi yönlerden sorunlar ortaya çıkar. Bu nedenlerle pratikte yalın süzgeçlerin ardarda bağlanması yöntemi yeğ tutulur.

KAYNAKLAR

- [1] Ragazzini, J.R. ve G.F. Franklin, Sampled-Data Control Systems. McGraw-Hill, 1958
- [2] Strejc, V., Synthese von Regelungssystemen mit Pros*-srechnen. Akademie Verlag, 1967
- [3] Jury, E.I., Theory and Application of the z-Transform Method, Wiley, 1964
- [A] Doetsch, G., Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation. 3. baskı, Oldenburg (Münih), 1967
- [5] Kuo, F.F. ve J.F. Kaiser, System Analysis by Digital Computer, Wiley 1966, 7. bölüm
- [6] Gold, B. ve C.M. Rader, Digital Processing of Signals, McGraw-Hill, 1969

Siemens Forschung- und Entwicklungsbereiche, 1972, sayı 2, s. 227-235