ÜDK : 513.83

Çizge Kuramının Temelleri 1

Yurdakul CEYHUN
ODTÜ

ÖZET

Bu yazıda çizge kuramının temel kavramları ve ilişkin dokusal denklemler tanımlanmıştır.

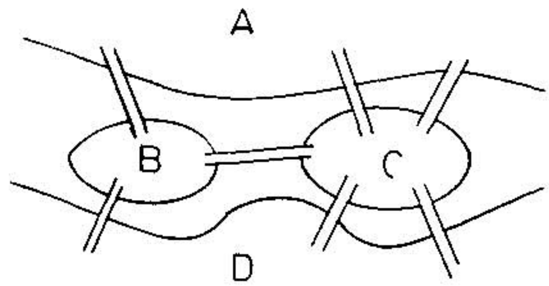
SUMMARY

Fundamental concepts of graph theory and the related topological equations are presented.

1. GİRİŞ

Devre çözümlemesinde karşılaşılan başlıca sorunlardan biri de, devreyi oluşturan öğelerin aralarındaki bağlantının, başka bir deyişle devrenin dokusunun, matematiksel olarak tanımlanmasıdır. Çizge kuramı bu konuda büyük kolaylıklar sağlamaktadır. Biz bu yazı dizisinde çizge kuramının temel kavramlarını vererek, bunların devre çözümlemesindeki uygulamasını göstereceğiz.

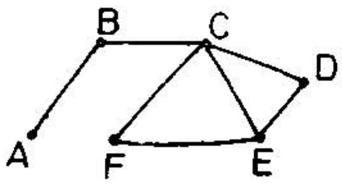
Euler (1707-1782) ünlü Königsberg Köprüsü sorununa çözüm ararken çizge kuramının temellerini atanlardan biri olmuştu. Königsberg kentinden akan Pregel ırmağındaki iki ada birbirlerine ve kıyılarına Şekil 1.1 de gösterildiği gibi yedi köprü ile bağlanmıştı. Euler'i düşündüren



Şekil 1.1.

sorun A, B, C ya da D ile gösterilen herhangi bir yerden başlıyarak uçmadan, yüzmeden ya da yerkürenin çevresinde dolanmadan bu yedi köprüden de yalnızca birer kez geçerek yine ilk başlama yerine geri dönmenin olanaklı olup olmadığı idi. Bu ve buna benzer ilginç bulmacaların çözümlerini ararken matematikçiler giderek değişik tür bir matematiğin gelişmesine yol açtılar.

Yakın zamana kadar pek uygulama olanağı bulunmayan çizge kuramı, bilgisayara dayanan yeni yöntemlerin gelişmesi ile elektrik mühendisliğinden yöneylem araştırmasına kadar geniş bir alanı kapsayan çalışmalarda aranan bir matematik kolu oldu. örneğin, bir ülkenin demiryolu ağını düşünelim. Diyelim ki bu ülkede 6 demiryolu durağı olsun ve bu duraklar birbirlerine Şekil 1.2 de gösterildiği gibi bağlansınlar. Şekil 1.2 deki çizgiler ve noktalar sırasıyla bu demiryolu ağının demiryollarını ve duraklarını simgesel olarak göstermektedir.



Şekil *12.*

Başka bir deyişle Şekil 1.2 bu demiryolu ağının çizgesidir. Bu çizgenin ilginç bir yanı şudur : buradaki her bir çizgi ve noktanın somut karşıtları vardır. Çizgiler demiryollarına, noktalar da duraklara karşıt oluyorlar. Oysa, böyle bir somut karşıtlık, çizge kuramında aranan bir koşul değildir. Başka bir örnek olarak, şöyle bi: arkadaşlık ilişkisi düşünelim: A: B nin; B : A ve C nııı, C : B, D, E ve F nin, D : C ve E nııı, E C, D ve F nm; F ise C ve E nin arkadaşı olsunlar. Şekil 1.2, kolaylıkla görüleceği gibi bu arkadaşlık ilişkilerinin çizgesı olarak da düşünülebilir. Bu örnekte artık çizgiler somut kavramlara karşıt değildirler.

Bu tür daha başka örneklere girmeden çizge kuramının temel kavramlarını verelim.

2. ÇIZGE KURAMININ TEMEL KAVRAMLARI

Şimdi, ilerde yazacaklarımızın açıklık kazanabilmesi için aşağıdaki tanımları verelim.

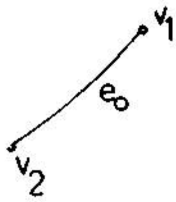
Tanım 2.1.

«Çizgi», iki ayrı uç noktası olan bir doğru parçasıdır.

Tanım *22.*

Bir çizginin her bir uç noktasına «düğüm» denir.

Şekil 2.1 de e_o çizgisi ve v_1, v_2 ile tanımlanan düğümleri gösterilmiştir. Bu iki tanımdan anlaşılmalıdır ki, bir çizginin yalnızca kendisi ve düğümleri tanımlanmaktadır, dolayısıyle bu çizginin yönünden, uzunluğundan vb. söz edilemez.



Şekil 2.1.

Tanım 2.3.

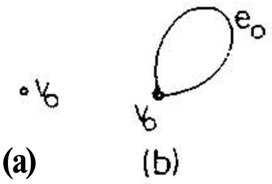
Eğer $\backslash_i$ düğümü e, çizgisinin düğümlerinden birisi ise v, düğümü ve e, çizgisi «çakışıktır» denir.

Demek ki $\backslash_i$ düğümü ile $e_($ çizgisinin çakışık olmaması, v, nin e, nin iki uç düğümlerinden birisi olmadığı anlamına gelir.

Tanım 2.4.

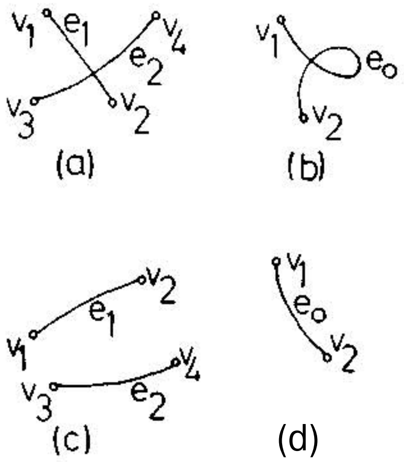
Rasgele sayıda çizgilerin düğümlere çakışık olduğu çizgiler ve düğümler kümesinin tümüne «çizge» denir.

Şimdi Tanım 2.4 den bir G çizgesinin içerdiği ve içermediği durumlan inceliyelim. G nin içinde hiçbir çizginin çakışmıyacağı tekdüğümler olabilir. Diğer bir durum ise bir çizgi bir düğüme iki kez çakışabilir, böyle bir çizgiye «tekçevre» diyoruz. Tekçevreler, bir çizginin uç düğümlerinin çakışmasında doğar. Şekil 2 2a ve 2.2b de tekdüğüm ve tekçevre gösterilmiştir Yine Tanım 2 4 den varılacak bir sonuç, bir çiz-



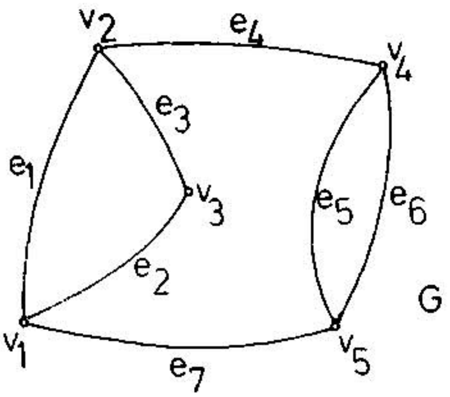
Şekil *22.*

gedekı çizgilerin düğümlerden başka ortak kesişme noktalarının olamıyacağıdır. Şekil 2 3a ve 2 3b de düğümlerden başka ortak noktaları var gibi gözüken çizgeler, ve Şekil 2.3c ve 2.3d de ise bu çizgelerin yeniden çizilişleri gösterilmiştir. Bundan böyle e bir çizgedeki çizgi



Şekil 23.

ve v ise düğüm sayısını göstersin. Şekil 2.4 de e = 7 ve v = 5 olan G çizgesi gösterilmiştir.

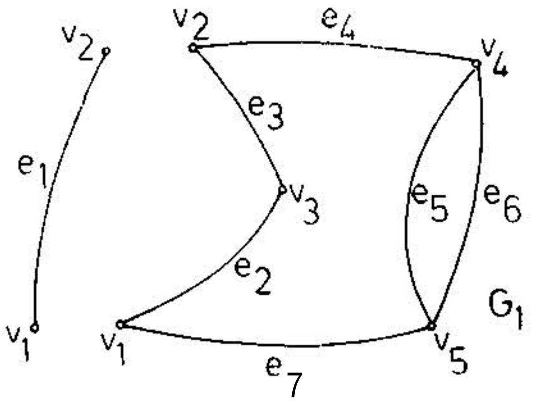


Şekil 2.4.

G çizgesinden e, çizgisinin çıkartılması ile elde edilen G, çizgesini düşünelim.

G, = G — e_1 (2.1)

Gj ve ej Şekil 2.5 de gösterilmiştir. Burada açıklanması gereken diğer bir nokta da, e, çizgisi G çizgesinden çıkartılırken *v,* ve v_2 düğümleri-



Şekil 2.5.

nin davranışlarıdır. Yukarda tekdüğümlerden söz edildiyse de tekçizgi (uç düğümleri olmıyan çizgi) gibi bir tanım verilmedi. Dolayısıyle böyle bir çıkartma işleminde G çizgesinde tek olan Vj ve v_2 düğümleri Şekil 2.5 de ikiye ayrılmaktadır. Bu işlemin tersini, ej in G, ile «birleşimini» düşünelim.

G = e, U G_1 *(22)*

Burada ise, Şekil 2.5 de herbiri iki ayrı düğüm olarak gösterilen v, ve v_2 birleşerek herbiri birer düğümle gösterilmektedir. Varılacak sonuç şudur: tekdüğüm olmadıkça, bir çizgeden bir düğüm çıkartılamaz ve böyle bir işlem tanımlanamaz.

Tanım 2.5.

G çizgesinin çizgilerinin ve/ya da tekdüğümlerinin altkümesinden oluşan G_s çizgesine, G nin «altçizgesi» denir.

G_B c G (2.3)

Dolayısıyle yukardaki örnekle sözü edilen ej çizgisi, G nin bir altçizgesidir.

e, c G (2.4)

ya da G, e, in «üstçizgesidir».

G => e_1 (2.5)

Kolayca anlaşılacağı gibi G_s in tek bir çizgiden oluşması gibi bir koşul yoktur. Şekil 2.5 deki *G* çizgesini,

Gj = (e,,e_3,e_5) **(2.6)**

altçizgesini düşünelim G den G, in çıkartılması ile elde edilecek altçizge G_2 olsun,

G_2 = G — Gj (2.7)

O zaman,

G_2 = (e_2,e_4,e_6,e,) (2.8)

çizgilerinden oluşur. Böyle tanımlanan G_2 altçizgesine, G, in «tümleyeni» denir. *G,* ve G_2 nin özelliklerinden ikisi, bileşimlerinin G ye eşit:

G = G, U G_2 **(2.9)**

ve kesişimlerinin de «boşçizge» olmasıdır:

G_1 ∩ G_2 = O (2.10)

Bozçizge, ne bir çizgisi ne de bir düğümü olan çizgedir. Her nekadar burada denklem 2.10 daki boşçizgeden herhangi bir çizge gibi, söz ediliyorsa da, ilerde açıklanacağı gibi bu, tam anlamı ile bir çizge değildir ve bir çelişkiye düşmemek için boşçizge kullanılırken dikkat etmek gerekmektedir, öyle ise tümleraltçizgenin tanımını verelim.

Tanım 2.6.

G, ve G_2, G çizgesinin iki altçizgesi olsunlar. Eğer,

G, U G_2 = G

ve

G_t n G_2 = 0

ise Gj ve G_2 birbirlerine göre G nin «tümleraltçizgeleridir».

Özel durumda, Gj = G ise G_2 boşçizge olur, ve Gj, G_2 yine Tanım 2.6 yi sağlarlar. Her çizge için böyle bir durumdan söz edilebilir. Demek oluyor ki her çizge kendi kendisinin bir altçizgesidir. Bu özel durumun dışında Gj ^s G olacaktır. Bir altçizge verilen çizgeye özdeş değil ise ona «özaltçizge» denir.

Tanım 2.7.

Bir düğüme çakışık olan çizgilerin sayısına, o düğümün «kertesi» denir.

v, ninci düğümün kertesini d (v,) ile gösterelim. Şekil 2.4 deki çizge için,

d (v,) = 3

d (v_2) = 2

d(v_3) = 3

d (v_4) = 3

$d(v_s) = 3$

dür. Tekdüğümlerin kerteleri sıfır alınır.

Tanım 2.8.

Bir çizgenin ya da altçizgenin çizgilerinden oluşan bir dizi düşünelim, oyie ki bu dizideki herbir çizginin iki uç düğümünden birisine o çirginin dizide kendinden önce ve sonra gelen çizgileri çakışık olsun. Bu koşulu sağlıyan çizgi kümesine «çizgi dizisi» denir.

Bu tanıma göre bir çizgi dizisinde herhangi bir çizgi birden çok kere bulunabilir.

Tanım 2.9.

Bir çizgi dizisinde bir çizginin bulunma sayısına o çizginin «çokluğu» denir.

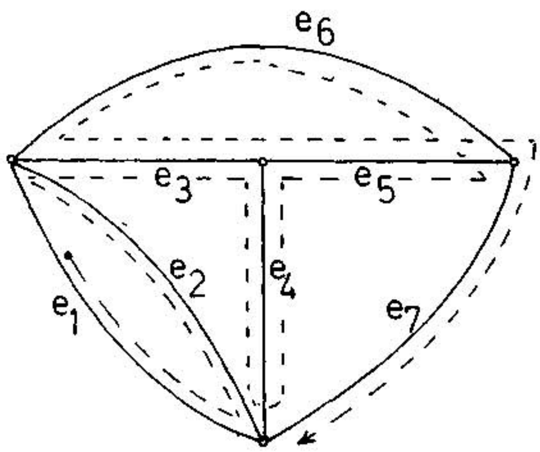
e, çizgisinin çokluğunu $m(e_t)$ ile gösterelim. O zaman Şekil 2.6 daki çizgeden,

(«ı. e_2, e_3, e_4, e_4, e_5, e_6, e_3, e_5, e,)

çizgi kümesi bir çizgi dizisi oluşturur. Bu dizideki çizgilerin çoklukları,

m (e,) = 1
$m(e_2) = 1$
$m(e_3) = 2$
$m(e_4) = 2$
$m(e_5) = 2$
m (e,) = 1
m (e,) = **1**

dir.



Şekil 2.6.

Tanım 2.10.

Eğer bir çizgi dizisindeki her çizginin çokluğu bir ise, bu çizgiler bir «çizgi dizgesi» oluştururlar.

Geçen örnekteki,

(e_1- e_2, e_3, e_4, e_7, e_5)

çizgileri bir dizge oluştururlar. Demek ki «her çizgi dizgesi», bir «altçizgedir».

Bir dizgedeki ilk çizginin başka bir çizgi ile çakışmıyan düğümüne dizgenin «başlangıç düğümü» (Vj) ve son çizginin başka bir çizgi ile çakışmıyan düğümüne ise dizgenin «sonuç düğümü» (v_f) denir. Her ikisine birden dizgenin «uç düğümleri» (v_t) denir. Yukardakı dizgede Vj ve v_3, sırası ile dizgenin başlangıç ve sonuç düğümleridir. Eğer bir dizgede uç düğümleri ayrık ise ($v_i \neq v_f$) o dizgeye «açık dizge»; çakışık ise ($v_2 = v_f$), o dizgeye «kapalı dizge» denir.

Tanım **2.11.**

Eğer bir açık çizgi dizgesinin uç düğümleri dışındaki tüm düğümlerinin kertesi 2 ise bu bir «yoldur».

Demek ki her çizgi bir yoldur. Şekil 2.4 den aşağıdaki çizgi kümelerini düşünelim:

$P_1 = (e_1, e_2)$

$P_2 = (e_1, e_5, e_4, e_3)$

bunlar birer yoldur. Beri yandan (ej, e_5) ve (e_1, e_2, e_3) birer yol değildir.

Tanım 2.12.

G çizgesinde her düğüm çifti arasında en az bir yol var ise G bir «bağlı çizgedir».

Eğer G bağlı çizge değilse, «ayrık çizgedir». G ayrık çizge ise G bağlı altçizgelerin birleşiminden oluşmuş demektir. Ayrık bir çizgenin bağlı altçizgelerinin herbirine o çizgenin «parçaları» denir, p, bir çizgenin parçalarının sayısını göstersin. Şekil 2.7 deki çizge 4 parçadan oluşmuştur.

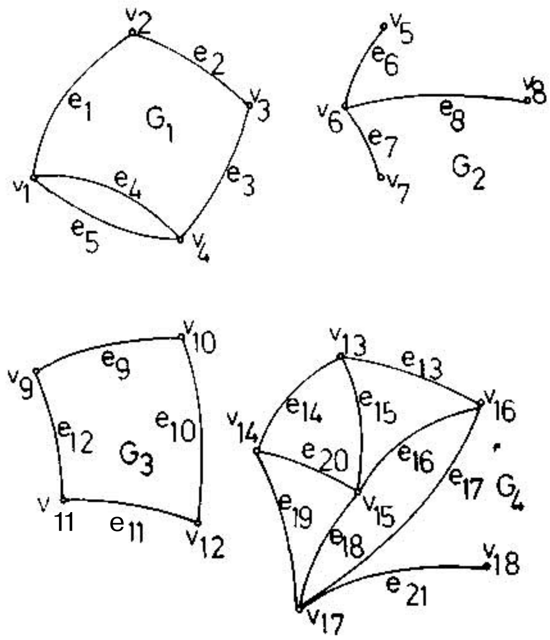
$$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \qquad \textbf{(2.11)}$$

ve p=4 dür. Bir çizgede p=1 olması o çizgenin bağlı olduğunu gösterir.

Tanım 2.13.

Bir yolun uç düğümleri çakışık ise, buna «çevre» (kapalı yol) denir.

Çevre tanımından, çevredeki düğümlerin kertelerinin iki olduğu hemen anlaşılabilir. Şekil 2.7 deki G çizgesinin G_3 parçası ve (e_4,e_5) çizgileri birer çevredirler. Beri yandan G_2 parçasında bir çevre yoktur. Genellikle kapalı bir çizgi dizgesi yalnız düğümlerde ortak olan çevrelerin birleşimidir. Bir çevreyi oluşturabilecek çizgilerden herbirine «çevre öğesi», hiç bir çevreyi oluşturamıyacak bir çizgiye «çevredışı öğesi» denir. Şekil 2.7 de e_6, e_7, e_8 ve e^ çizgileri çevredışı öğeleridir. Diğer tüm çizgıleı çevre öğeleridir.



Şekil 2.7.

Teorem 2.1.

Sonlu sayıda öğelerden (çizgi ve düğüm) oluşan G çizgesindeki kertesi tek sayıya eşit olan düğümlerin sayısı çifttir.

Kanıt: r, kertesi i olan düğümlerin sayısı olsun. G de e kadar çizgi varsa kertelerin toplamı 2e ye eşittir, öyle ise,

$$2e = r, + 2 r_2 + 3 r_3 + . + n r_n \quad (2.12)$$

$$2e—2 r_2—2 r_3—4 r_4— . = rj+r_3 + r_5 +. . \quad (2.13)$$

Denklem 2.13 ün sol yanının çift sayıya eşit olduğu kolayca görülebilir. Bu da, sağ yanının da çift sayıya eşitliği demektir.

Öyleyse,

$$\underset{1=0}{I} \; r_{21+1} = \text{çift}$$

Teorem 2.2. (Listing)

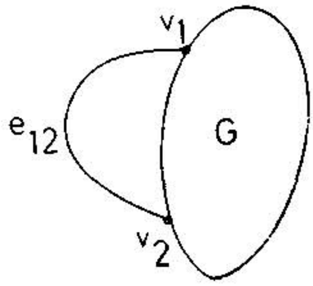
G çizgesinin, açık çizgi dizgesi olması için gerek ve yeter koşul, G nin bağlı olması ve kertesi tek sayı olan yalnızca iki düğümünün bulunmasıdır.

Kanıt: Eğer G bir açık çizgi dizgesi ise, bu, Tanım 2.10 dan G nin bağlı ve kertesi tek sayı olan yalnızca iki düğümü bulunduğu demektir.

Beri yandan G nın bağlı ve kertesi tek sayı olan yalnızca iki düğümü bulunduğunu varsayalım. Bu düğümler v, ve v_2 ile gösterilsinler. v, ve v_2 yi e_{12} çizgisi ile birleştırelim. Bu birleşimden doğan G' çizgesi,

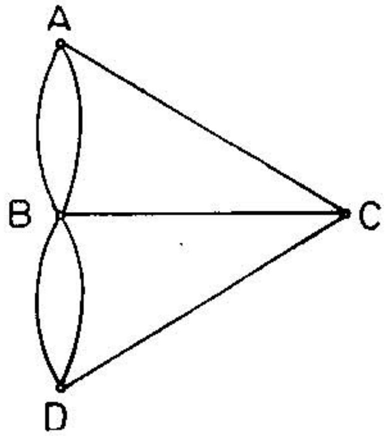
$$G' = e_u \cup G$$

Şekil 2.8 de gösterilmiştir. G' çizgesinin tüm düğümlerinin kertesi çift sayıya eşittir. Bu tür çizgelere «Euler Çizgesi» denir. Euler çizgesi kapalı bir çizgi dizgesidir, başka bir deyişle yal nız düğümlerde ortak olabilen çevrelerin birleşiminden oluşmuştur. Öyleyse G bir açık çizgi dizgesidir.



Şekil 2.8.

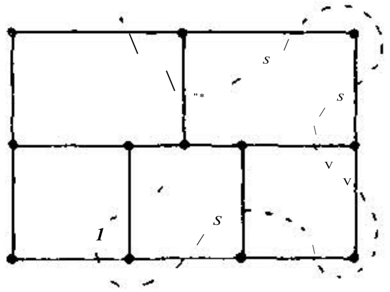
Listing Teoreminin ilginç uygulamaları bir çok bulmacalarda görülebilir. Örneğin Königsberg Köprülerini düşünelim. Şekil 1.1 e ilişkin çizgeyi; A, B, C ve D düğümler ve köprüler de çizgiler olarak alındığında, Şekil 2.9 da olduğu gibi gösterebiliriz. Burada kertesi tek sayı olan



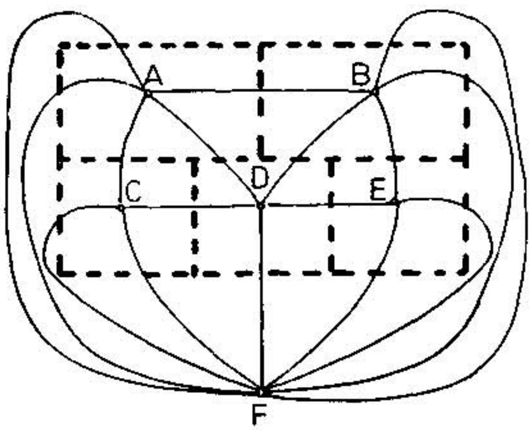
Şekil 2.9.

dört düğüm bulunduğundan bu sorunun çözümü yoktur. Başka bir örnek şöyle verilebilir:

Şekil 2.10 da kesik çizgilerle gösterildiği gibi kalemi kaldırmadan her çizgiden yalnızca bir kere geçilebilir mi, geçilemez mi? Şekil 2.11 de gösterilen ilişkin çizgeye bakıldığında A, B, C, D, E ve F düğümlerinin kertelerinin d (A) = 5, d(B)=5, d(C)=4, d (D) =5, d (E) = 4, d (F) = 9 olduğu görülür. Demek ki burada da ikiden çok tek sayıh kertesi olan düğüm bulunduğundan bu sorunun da çözümü yoktur.



Şekil **2.10.**



Şekil **2.11.**

Artık, çizge kuramının en temel kavramını tanımlayabiliriz.

Tanım 2.14.

G çizgesinin aşağıdaki özellikleri sağlıyan T altçizgesine «ağaç» denir.

(i) T bağlıdır,

(ii) G nin bütün düğümleri T nin de düğümleridir,

(iii) T nin hiçbir altçizgesi çevre yapmaz,

(iv) T de yalnızca v—1 kadar çizgi vardır.

Teorem 2.3.

Her bağlı çizgede en az bir ağaç vardır.

Bu teoremin kanıtı düşünme olanağı sağlamak için okuyucuya bırakılmıştır.

Tanım 2.15.

G nin p kadar parçası olsun,

$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup \cdots \cup G_p$

ve T_i, G, nin içinde seçilen bir ağacı göstersin. O zaman,

$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \ldots \cup T_p$

bir «ormandır».

Tanım **2.16.**

Bir ağacın tümleraltçizgesine «tümleıağaç» denir.

Tanım **2.17.**

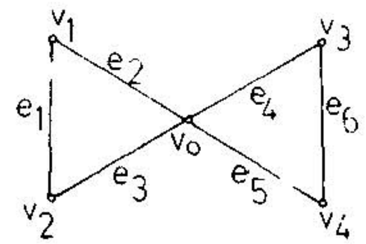
Bir ormanın tümleraltçizgesine «tümlerorman» denir.

Tanım 2.18.

Ağacın ya da ormanın bir çizgisine «dal» denir.

Tanım 2.19.

Tümlerağacın ya da tümlerormanın bir çizgisine «kiriş» denir.



Şekil **2.12.**

Şekil 2.12 de gösterilen G çizgesini düşünelim. G de dokuz tane değişik ağaç seçilebilir. Bunlar,

$T_1 = (e_2, e_3, e_4, e_5)$ $T_6 = (e_2, e_3, e_4, e_6)$
$T_2 = (e_1, e_2, e_4, e_6)$ $T_7 = (e_2, e_3, e_5, e_6)$
$T_3 = (e_1, e_3, e_5, e_6)$ $T_8 = (e_1, e_2, e_4, e_5)$
$T_4 = (e_1, e_2, e_5, e_6)$ $T_9 = (e_1, e_3, e_4, e_5)$
$T_5 = (e_1, e_3, e_4, e_6)$

dir. Bu ağaçlara karşıt olan tümlerağaçlar ise sırasıyle şunlardır :

$T'_1 = (e_1, e_6)$ $T'_6 = (e_1, e_5)$
$T'_2 = (e_3, e_5)$ $T'_7 = (e_1, e_4)$
$T'_3 = (e_2, e_4)$ $T'_8 = (e_3, e_6)$
$T'_4 = (e_3, e_4)$ $T'_9 = (e_2, e_6)$
$T'_5 = (e_2, e_5)$

Teorem 2.4.

Tanım 2.14 de verilen özelliklerden herhangi üçü dördüncüsünü kanıtlar.

Bu teoremin kanıtı da okuyucuya bırakılacak ve aşağıdaki teoremin kanıtı verilecektir.

Teorem 2.5.

Tanım 2.14 deki (iii) ve (iv) üncü özellikler öbür iki özelliği kanıtlamaya yeterdir.

Kanıt : (iii) T nin hiçbir altçizgesi çevre yapmaz.

(iv) T de yalnızca v—1 kadar çizgi vardır.

Verilen T altçizgesinin p kadar parçası olduğunu ve (iii) ile (iv) deki özellikleri sağladığını varsayalım.

$$T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_p$$

T_i de v_i kadar düğüm varsa T_i nın $v_i—1$ kadar çizgisi var demektir, v, T deki düğüm sayısını gösterirse,

$$v = \sum_{i=1}^{p} v_i \qquad (2.14)$$

dir. Ama T nin çizgilerinin sayısı her bir T_i deki çizgilerin toplamına eşit olacağından,

$$\sum_{i=1}^{p} (v_i - 1) = \sum_{i=1}^{p} v_i - p$$
$$= v - p \qquad (2.15)$$
$$= v - 1$$

olarak yazılabilir. Bu da p = 1 olduğunu gösterir ki, başka bir deyişle T nin bağlı olduğunu kanıtlar.

Böylelikle (iii) ve (iv) üncü özelliklerin (i) inci özelliği kanıtladığını göstermiş olduk. Teorem 2.4 kullanılarak geri kalan kısım tamamlanabilir.

Tanım 2.20.

Bir çizgedeki kiriş sayısı k ye, o çizgenin «sıfırlığı» denir.

Tanım *2.21.*

Bir çizgedeki dal sayısı b ye, o çizgenin «aşaması» denir.

Teorem 2.6.

v, e ve p kadar, sırasıyla, düğümü, çizgisi ve parçası olan G çizgesinin sıfırlığı,

$$k = e - v + p \qquad (2.16)$$

ve aşaması

$$b = v - p \qquad (2.17)$$

dir.

Kanıt: Denklem 2.17 endüksiyon yolu ile kanıtlanabilir. Verilen bir çizgede,

$$k = e - b$$

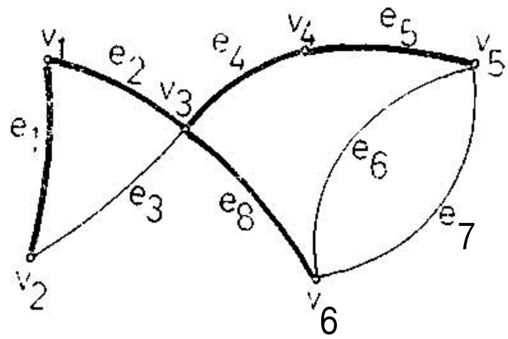
olduğundan, denklem 2.16 nın da doğruluğu görülebilir.

Tanım 2.22.

Bağlı bir G çizgesinin seçilen T ağacına göre «t-çevreleri» (temel çevreleri) k kadar kirişlerin birer birer tanımlayacakları tek bir kiriş ve birik ağaç dallarından oluşan çevrelerdir.

Eğer G bağlı değilse t-çevreler seçilecek bir ormana göre tanımlanırlar. Böylelikle, G çizgesinin t-çevrelerinin sayısı çizgenin sıfırlığına eşittir. Şekil 2.13 deki çizgede T ağacının,

$$T = (e_1, e_2, e_4, e_5, e_8) \qquad (2.18)$$



Şekil 2.13.

olarak seçildiğini düşünürsek tanımlanacak t-çevreler,

$c_{t1} = (e_1, e_2, e_3)$

$c_{t2} = (e_4, e_5, e_6, e_8)$

$c_{t3} = (e_4, e_5, e_7, e_8)$

dir ve sayısı,

$$k = e - v + p$$
$$= 8 - 6 + 1 = 3$$

Ağaca ilişkin çevre gibi, başka bir temel kavram kesitlemedir.

Tanım 2.23.

Aşaması b olan G çizgesinin aşağıdaki iki özelliği sağlıyan altçizgesi G_x e «kesitleme» denir.

(i) G_x, G den çıkarıldığında elde edilen çizgenin aşaması b — 1 dir.
(ii) G_x in başka hiç bir özaltçizgesi G den çıkarıldığında elde edilen çizgenin aşaması b den değişik olmaz.

Tanım 2.23 deki G çizgesi eğer bağlı ise G_x, G den çıkarıldığında G iki parçadan oluşan bir çızgeye indirgenir. Kesitleme kavramını açıklamak için Şekil 2.13 deki çizgeyi düşünelim Burada,

$G_{:} = (e,, e_2)$
$G_2 = (e_4, e_6, e_7)$
$G_3 = (e_2, e_3, e_4, e_8)$
$G_4 - (e_2, e_3, e_6)$

altçızgeleri düşünüldüğünde Gj ve G_2 nın kesitleme oldukları görülür. Beri yandan G_3 un çıkarılması aşamayı iki düşüreceğinden, bu bir kesitleme değildir. Bu durumda tekdüğüm v, de bir parça olarak düşünülmektedir. G_4 ün $e_?$ ve e_3 den oluşan altçizgesi de aşamayı bir azaltacağından G_4 de kesitleme değildir, t-çevrelerde olduğu gibi, seçilecek bir ağaca göre temel kesitlemeler de tanımlanabilir.

Tanım 2.24.

Bağlı bir G çizgesinin, seçilen T ağacına gorc «t-kesitlemelerı» (temel kesitlemeleri) b kadaı dalların birer birer tanımlıyacakları tek bir dal ve birik tümlerağaç kirişlerinden oluşan kcsıtlemelerdir.

Tanım 2.24 deki G çizgesi eğer bağlı değil ise, t-kesitlemeleri seçilecek bir ormana göre tanımlanırlar. Çizgenin aşaması, çizgedeki t-kesılemelerinifı sayısına eşittir. Yine Şekil 2.13 deki çizgeyi ve denklem **2.18 de verilen ağacı** düşünürsek tanımlanabilecek kesitlemeler şöyle sıralanabilir :

$x,, = (e,, e_3)$
$x_{12} = (e_2, e,)$
$x,, = (e_4, e,, e_7)$
$x_{,4} = (e,, e_{(,}, e_7)$
$x,, = (e_6, e_7, e_s)$

Görüldüğü gibi t-kesitlcmc sayısı,

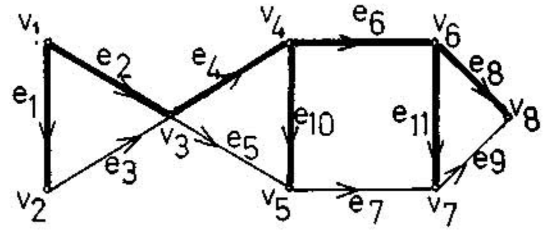
$b = v — p$

$= 6 — 1 = 5$

olarak bahınur

3. YÖNLENDİRİLMİŞ ÇIZGELERİN DOKUSAL MATRİSLERİ

Buraya kadar yönlendirilmemiş, ya da çizgilerine bir yon verilmemiş, çizgelerden soz ettik. İlerde karşılaşacağımız sorunlara çözüm verebilmeleri için bundan böyle düşüneceğimiz çızgelerdeki çizgilere birer yön koyacağız. Başka bir deyişle artık yönlendirilmiş çizgeler üzerinde uğraşacağız Şekil 3.1 de \önlendirilmiş bir çızge gösterilmektedir. Buradaki e_i çizgisini düşünelim. Bu çizgiye verilen yon Vj den v_2 ye doğrudur ki, anlamı, ej üzerinden yapılacak bir geçiş eğer çizgiye konan okla ayni yönde ise artı, ters yönde ise eksi olarak onanacak-



Şekil 3.1.

tır. Yön kavramını saptadıktan sonra artık verilen bir çizgeyi belirliyecek dokusal matrisleri tammlıyabiliriz.

Tanını 3.1.

Eğer e ve v sırasıyla G çizgesindeki çizgi ve düğuın sayısını gösteriyorsa v kadar dizeği ve e kadar dikecı olan «çakışım» (düğüm) matrisi $\tilde{n}$ = ÜTi„]* c aşağıdaki gibi yazılabilir.

Eğer e, çizgisi v, duğümu ile çakışık ve yönü v, den uzakiaşiyorsa : $ıt_u = 1$

Eğer e, çizgisi \\ düğümü ile çakışık ve yönü v_2 ye geliyorsa : TI„ = — 1

Eğer e, çizgisi v_1 düğümüne çakışık değilse: $\pi_{ii} = 0$

Bu tanıma göre Şekil 3.1 deki çizgenin çakışım matrisi,

$$\tilde{n} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\ \end{array}$$

$$\tilde{n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{ü} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{array} \qquad (3.1)$$

olarak yazılır. Çakışım matrisinin özelliklerinden önemli olan ikisi şunlardır :

a. Her dikeçte sıfır olmayan yalnız iki öğe vardır.

b. g ($1 \leq g \leq v$) boyunda herhangi bir behı teninin değeri 1, —1 ya da 0 dır.

Bunlardan ilki hemen görülebilirse de, ikincisi biraz düşünme gerektirmektedir.

Dizek ve dikeçlerinin **sırasını uygun düzen**liyerek çakışım matrisinin,

$$\tilde{n} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E_1 & E_2 & & E_p \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} \tilde{\Pi}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{\ } & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_p \end{array} \qquad (3.2)$$

olarak yazılabileceğini düşünürsek buradan çıkacak sonuç $\tilde{n}$ nin karşıt olduğu çizgede p kadar parça vardır demektir.

Tanım 3.2.

Bağlı bir çizgenin çakışım matrisinin rasgele bir dizeğinin çıkarılması ile elde edilecek n matrisine «indirgenmiş çakışım matrisi» denir.

Tanım 3.2 ve **çakışım matrisinin ilk özelliğinden,** indirgenmiş çakışım matrisi verildiğinde buradan çakışım matrisinin **yazılabileceği** kolaylıkla görülebilir, n matrisinin en büyük özelliği **bunun v—1 boyundaki herhangi bir** altmatrisinin belirtisinin sıfırdan değişik olması için yeter **ve** gerek **koşulun, bu altmatrisin** dikeçlerinin çizgedeki bir ağaca karşıt olmalarıdır.

Tanım 3.3.

e kadar çizgisi olan G çizgesinde, d kadar rasgele yönlendirilmiş çevre olsun. «Çevre matrisi» $\overline{B} = [b_{ij}]_{de}$ **aşağıdaki gibi yazılabilir.**

Eğer ej çizgisi c_f **çevresinde ve özdeş yönde** ise : $K = 1$

Eğer e_j çizgisi c_i **çevresinde ve ters yönde** ise : $b_{ij} = -1$

Eğer e, çizgisi c_i çevresinde bulunmuyorsa: $b_{ij} = 0$

Şekil 3.2 deki G çizgesindeki altı çevre,

$c_1 = (e_1, e_2)$
$c_2 = (e_2, e_3, e_4)$
$c_3 = (e_1, e_3, e_4)$
$c_4 = (e_4, e_5, e_6)$
$c_5 = (e_1, e_3, e_5, e_6)$
$c_6 = (e_2, e_3, e_5, e_6)$

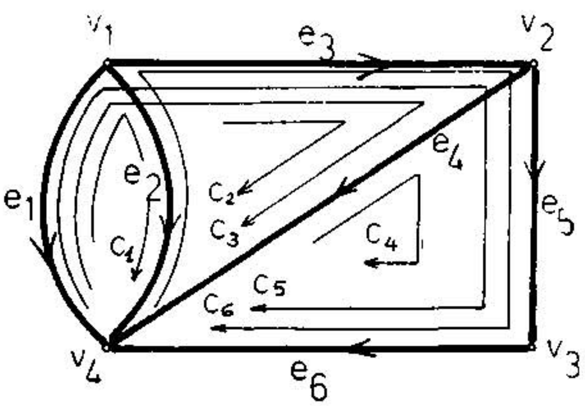
olarak tanımlanabilir. Herbirine, şekilde belirtildiği gibi rasgele bir yön verelim, o zaman bu çizge için çevre matrisi,

$$\overline{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array} \qquad (3.3)$$

olarak bulunur. Şekilden de görülebileceği gibi örneğin, c_1, c_2 ve c_3 çevreleri bağımsız değildir. Başka bir deyişle Cj ve c_2 nin bilinmesi c_3 ün de bilinmesi demektir. Bir genellemeye gidilir se $\overline{B}$ deki bağımsız çevreler, ya **da** $\overline{B}$ matrisinin **aşaması** r_B,

$$r_B = e - v + p = k \qquad (3.4)$$

dir.



Şekil 3.2.

Tanım 3.4.

Bir çizgede seçilecek ağaca göre kirişlerin tanımlıyacağı t-çevrelerin yönleri tammlıyan kirişlerin yönlerine özdeş alınarak yazılacak B, matrisine «t-çevre matrisi» **(temel çevre)** denir.

Böylelikle Tanım 3.4 den B_f matrisinin her zaman,

$$B_f = [\overset{(b)}{B_t}, \overset{(k)}{U}]\ (k) \qquad (3.5)$$

olarak yazılabileceği görülür. Denklem 3.5 de U kxk boyutunda birim matris olup, B, ve U nun dikeçleri sırasıyla çizgedeki dal ve kirişlere karşıttır. Şekil 3.2 de,

$$T = (e_1, e_3, e_5) \qquad (3.6)$$

olarak seçilen bir ağaca göre t-çevre matrisi

$$\mathbf{B}_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_3 & e_5 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ e_2 \\ e_4 \\ e_6 \end{array} \quad (3.7)$$

dir. Bu özel örnekte denklem 3.6 da gösterilen ağacın tümleragacınm da bir ağaç olmasından ötürü Bj altmatrisinin de belirteninin sıfırdan değişik olduğu görülür.

Tecrem 3.1.

Bir çizge için çevre ve çakışım matrislerinin dikeç sıralamaları özdeş alınırsa,

$$\bar{B}\,\tilde{\Pi}^T = 0 \quad (3.8)$$

ve

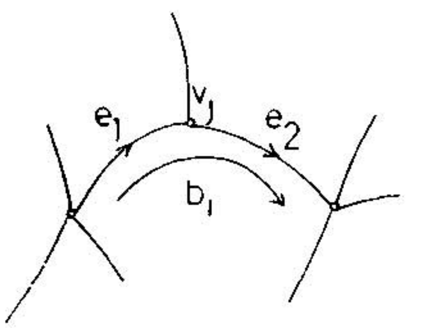
$$\tilde{\Pi}\,\bar{B}^T = 0 \quad (3.9)$$

olur.

Kanıt: Denklem 3.8. ve 3.9 birbirlerinin devriği olduklarından yalnız birini kanıtlamak yeterlidir, b, ve -jt, çevre ve çakışım matrislerinin i ve j yinci dizekleri olsunlar,

$$b_i\, n_j^T = s \quad (3.10)$$

Denklem 3.10 daki çarpımda sıfırdan değişik bir terim çıkması için çizgilerin bir kısmının hem j yinci düğüme çakışık hem de i ninci devre içinde olması gereklidir. Bu durum Şekil 3.3 de gösterilmiştir ve bu çizgiler ancak ya hiç yoktur ya da biri + 1 diğeri —1 olarak kesinlikle ikidir. Tüm yönlenme durumları incelendiğinde s = 0 görülür.



Şekil 3.3.

Şekil 3.2 deki çizgenin çakışım matrisi denklem 3.3 e göre yeniden düzenlendiğinde.

$$\bar{\Pi} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_3 & e_5 & e_2 & e_4 & e_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \quad (3.11)$$

elde edilir ki, buradan da Teorem 3.1 in sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Tanım 3.5.

Bir çızgede x kadar kesitleme olsun ve bunlara rasgele yönler verilsin, bu çizge için «kesitleme matris» $\bar{A} = [a_{ij}]$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

Eğer e_j çizgisi x_i kesitlemesinde ve özdeş yönde ise : $a_{ij} = 1$

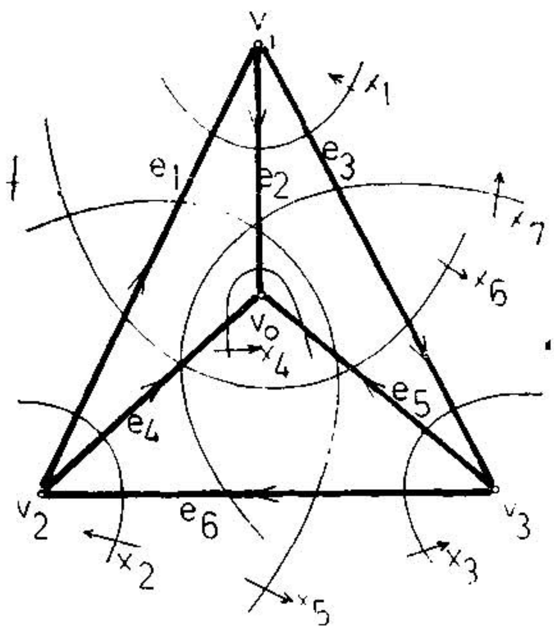
Eğer e_j çizgisi x_i kesitlemesinde ve ters yönde ise : $a_{ij} = -1$

Eğer e_j çizgisi x_i kesitlemesinde değilse: $a_{ij} = 0$

Şekil 3.4 de verilen G çizgesinde,

$x_1 = (e_1, e_2, e_3)$	$x_5 = (e_1, e_2, e_5, e_6)$
$x_2 = (e_1, e_4, e_6)$	$x_6 = (e_1, e_3, e_4, e_5)$
$x_3 = (e_3, e_5, e_6)$	$x_7 = (e_2, e_3, e_4, e_6)$
$x_4 = (e_2, e_4, e_5)$	

olmak üzere yedi kesitleme vardır. Şekilde de gösterildiği gibi bu kesitlemelere gelişigüzel



Şekil 3.4.

yönler verilmiştir. Bu duruma karşıt kesitleme matrisi,

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \qquad (3.12)$$

oiarak yazılır. Çevre matrisinde yapılan benzer düşünce ile kesitleme matrisinin aşamasının (r_A),

$$r_A = v - p = b \qquad (3.13)$$

olduğu görülebilir.

Tanım 3.6.

Bir çizgede seçilecek ağaca göre dalların tanımlayacağı t-kesitlemelerin yönleri tanımlıyan dallara özdeş alınarak yazılacak A_f matrisine «t-kesitleme matrisi» denir.

Böylelikle, verilen bir çizge için A_f matrisinin her zaman,

$$A_f = [\overset{(b)}{U} \quad \overset{(k)}{A_t}] \quad (b) \qquad (3.14)$$

olarak yazılabileceği görülür. Şekil 3.4 deki çizgede,

$$T = (e_2, e_4, e_5) \qquad (3.15)$$

olan bir ağacın seçildiğini onaylıyalım. Bu durumda,

$$A_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_2 & e_4 & e_5 & e_1 & e_3 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_2 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \qquad (3.16)$$

elde edilir. Buradan A_f in b boyutundaki bir altmatrisinin belirteninin sıfırdan değişik olması için karşıt dikeçlerinin bir ağaç oluşturması koşulu ortaya çıkar.

Teorem 3.2.

Verilen bir çizge için yazılacak çevre ve kesitleme matrislerinin dikeç düzenleri özdeş olduğundan.

$$\bar{A}\,\bar{B}^T = 0 \qquad (3.17)$$

ve

$$\bar{B}\,\bar{A}^T = 0 \qquad (3.18)$$

dır.

Teorem 3.2. nin kanıtlanması, Teorem 3.1 e benzediğinden burada buna değinmeyeceğiz.

Teorem 3.3.

Ozdcş dıkeç düzeninde, bir çizge için t-çevre ve t-kesitleme matrisleri aşağıdaki gibi verilmiş olsunlar,

$$B_f = [B_t \quad U] \qquad (3.19)$$

$$A_f = [U \quad A_t] \qquad (3.20)$$

Bu durumda,

$$A_t = -B_t^T \qquad (3.21)$$

dir.

Kanıt: Teorem 3.2 den,

$$A_f B_f^T = 0$$

$$[U \quad A_t] \begin{bmatrix} B_t^T \\ U \end{bmatrix} = 0$$

$$B_t^T + A_t = 0$$

P, m x n boyunda bir matris olsun. Eğer $m \leq n$ ise P nin m x m; $m \geq n$ ise, n x n boyundaki altmatrislerinin belirtenlerine bu matrisin «ana belirtenleri» denir.

Teorem 3.4. (Binet-Cauchy)

P ve Q sırasıyla m x n ve n x m boyunda matrisler olsun. PQ matrisinin belirteni,

$|PQ| = \sum$ P ve Q nun karşıt olan ana belirtenlerinin çarpımları

Teoremdeki toplam, tum ana belirtenler için alınmalıdır.

Teorem 3.5.

Bağlı bir çizgede yazılabilecek tüm ağaçların sayısı t ise,

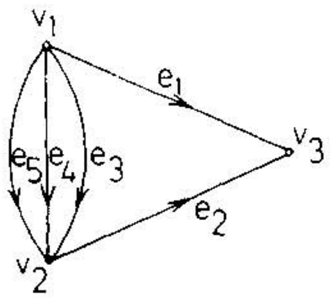
$$t = |\mathbf{n}\mathbf{n}^T|$$

$$= |A_f A_f^T|$$

$$= |B_f B_f^T|$$

dir.

Kanıt: Teoremin kanıtı Binet-Cauchy Teoremi ve A_f, B_f ya da **n** matrisindeki bir ana belirtenin değerinin, yalnızca karşıt dikeçler bir ağaç ya da tümlerağaç oluşturduklarında $\pm$ le eşit ve diğer durumlarda sıfır olmasından ge lir.



Şekil 3.5.

Teorem 3.5 in uygulaması olarak Şekil 3.5 deki çizgeyi düşünelim, e_1 ve e_2 seçilen ağaç olsun. Bu durumda,

$$\mathbf{n} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

$$|\mathbf{n}\mathbf{n}^T| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad (3.22)$$

$$A_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \end{array}$$

$$|A_f A_f^T| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \qquad (3.23)$$

$$B_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array}$$

$$|B_f B_f^T| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \qquad (3.24)$$

olarak bulunur. Böylelikle verilen bir çizgenin sıfırlığı ya da aşamasından kimi küçükse denklem 3.22, 3.23 ya da 3.24 kullanılarak çizgedeki toplam ağaç sayısı bulunabilir.

Buraya kadar çizge kuramının temel kavramları ile dokusal matrislerinin tanımlarını yapmış oluyoruz. Bu yazı dizisinin ikinci bölümünde bazı özel tür çizgelerden söz ettikten sonra devre kuranımın temel konutlarını ortaya koyarak uygulamalara geçeceğiz.

YAZIDA GEÇEN TERİMLERİN İNGİLİZCE KARŞILIKLARI

Ağaç — Tree
Altçizge — Subgraph
Ana Belirten — Princıple Determinant
Aşama — Rank
Ayrık Çizge — Separated Graph
Bağlı Çizge — Connecıed Graph
Başlangıç Düğümü — Initial Vertex
Belirten — Determinant
Birleşim — Union
Boşçizge — Null-graph
Çakışım — Incidence
Çevre — Circuit
Çevre öğesi — Circuit Element
Çevredışı Öğesi — Noncircuit Element
Çizge — Graph
Çizgi — Edge
Çizgi Dizisi — Edge Sequence
Çizgi Dizgesi — Edge Train
Çizginin Çokluğu — Multiplicity of an Edge
Çözümleme — Analysis
Dal — Branch
Devrik — Transposed
Dikeç — Column
Dizek — Row
Doku — Topology
Düğüm — Node (Vertex)
Düğümün Kertesi — Degree of a Vertex
İndirgenmiş — Reduced
Kanıt — Proof
Kesitleme — Cutaet
Kesişim — Intersection
Kiriş — Chord
Kuram — Theory
Orman — Forest
Özaltçizge — Proper Subgraph
Parça — Parts, Maximally Connected Subgraphs
Sıfırhk — Nullity
Sonuç Düğümü — Final Vertex
Tekçevre (Özçevre) — Selfloop
Tekdüğüm — Isolated Vertex
Temel — Fundamental
Tümler — Complementary
Tümlerağaç — Cotree
Tümlerorman — Coforest
Uç Düğümleri — Terminal Vertices
Üstçizge — Supergraph
Yol — Path
Yönlendirilmiş — Oriented