

# Otokorelasyon Metodu İle Rastgele Fonksiyonların Spektral Analizi

Yazan :  
Dr. HalU BENGÎ  
ODTÜ

## ÖZET

Bu yazıda sınırlı süreli eğriler, yahut eşit aralıklı değerler halinde verilen rastgele fonksiyonların otokorelasyon metodu ile spektral analizlerinin nasıl yapılacağı, ve uygulamada nelere dikkat edilmesi gerektiği anlatılmıştır.

## SVMMARY

This work is an attempt to present to the reader the practical aspects of, and some of the problems involved in, the spectral analysis of random processes (which have been gathered either in the form of continuous records of finite length or in the form of equi-spaced data) by autocorrelation.

Evrende ve çevremizde birçok olaylar rastgele (random) değişimler gösterirler, örneğin astronomi, meteoroloji, jeofizik, mühendislik, iletişim, endüstri, ulaşım, trafik, ekonomi, ticaret, eğitim, sağlık, pazarlama vb. alanlarındaki çeşitli olaylar ve oluşumlar gibi. Rastgele değişimli olayları bir denklemle belirleyip bunları bilinen klasik matematik metodlarla incelemek mümkün değildir. Bu bakımdan rastgele fonksiyonların incelenmesinde istatistik metodları, bilhassa son yirmi yıl içinde çok hızlı gelişmeler göstermiş bulunan korelasyon tekniğinin önemi büyüktür.

Bu yazıda korelasyon tekniğinin sadece bir bölümünü teşkil eden otokorelasyon metodu ile rastgele fonksiyonların spektral analizi ile, metodun uygulanmasında izlenmesi gerekli işlemler anlatılmıştır. Problem genel görüntüsüyle ele alınmış olmakla beraber ağırlık daha çok eşit aralıklı bir rastgele serinin spektral analizinin bilgisayarla çözümüne verilmiştir.

Anlatılan spektral analiz metodu stasyonere ve ergodik olan bütün rastgele olaylar için geçerlidir.

## 1. SPEKTRAL YOĞUNLUK : $\hat{F}(\omega)$

Bir  $f(t)$  rastgele fonksiyonunu tanımlayan en önemli özelliklerinden biri, fonksiyonun spektral yoğunluğudur. Spektral yoğunluk, yahut güç spektral yoğunluğu, fonksiyonun enerji yeteneğinin frekans spektrumu içindeki dağılımını gösterir, ve

$$\Phi(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{[F(\omega)]^2}{\Delta\omega} \quad (D)$$

ile verilir. Burada  $F(\omega)$ ,  $f(t)$ 'nin Fourier transformunu gösterir. (1) denkleminde görüleceği

gibi,  $\hat{F}(\omega)$ 'nin hesaplanabilmesi için  $f(t)$ 'nin Fourier transformunun bulunması zorunludur. Bir rastgele fonksiyon ise  $t = -\infty$  da başlayıp, kendisini hiçbir zaman tekrar etmeden,  $t = +\infty$  a kadar devam eder. Bu sebeple böyle bir fonksiyonun Fourier transformunu, dolayısıyla klasik metodlarla spektral yoğunluğunu tam olarak hesaplamak mümkün değildir.

Verilen bir rastgele fonksiyonun spektral yoğunluğunu yaklaşık olarak hesaplamanın çeşitli yolları vardır, örneğin, uygulamada böyle bir fonksiyonun, Şekil 1'de görüldüğü gibi, ancak  $t_1$  ve  $t_2$  ile sınırlı bir parçasının ölçülmesi mümkün olabileceği için aşağıdaki yollardan biri kullanılabilir.

1.  $f(t)$ 'nin periyodik bir fonksiyon olup periyodunun  $t_2 - t_1 = T$  olduğu farzedilir ve bu sözde periyodik fonksiyonun Fourier transformu hesaplanır. Sonuç bir çizgi spektrumudur.

2.  $f(t)$ 'nin aperiodyk bir fonksiyon olduğu ve  $T$  kısmı dışında  $t$ 'nin bütün değerleri için  $f(t) \equiv 0$  olduğu farzedilir, ve bu sözde aperiodyk fonksiyonun Fourier transformu hesaplanır. Sonuç bir sürekli yoğunluk eğrisidir. Her iki metodun da hatalı olduğu açıktır; fakat her iki metod da  $f(t)$ 'nin spektrumu hakkında benzer yaklaşık sonuçlar verirler.

3. Oldukça sık kullanılan bir metod da şudur:  $f(t)$  önce bir manyetik banda kaydedilir. Sonra bu bandın iki ucu birleştirilerek sonsuz band halinde bir band okuyucu cihaza yerleştirilir. Cihazın çıkışı akordlu bir filtre devresinden geçirilir. Cihaz devamlı olarak çalıştırılmak ve bandın her bir devri için filtre başka bir frekansa ayarlanmak suretiyle çıkıştan  $f(t)$ 'nin spektral analizi elde edilir.

4. Spektral yoğunluk en doğru şekilde otokorelasyon metodu uygulanarak Wiener-Khintchine bağıntısından bulunur.

## 2. WIENER - KHINTCHINE BAĞINTISI

Herhangi bir  $f(t)$  fonksiyonunun  $E(\tau)$  ile gösterilen otokorelasyon fonksiyonu

$$B(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot f(t+\tau) dt \quad (2)$$

denklemlerle verilir. Bu denklemde  $T$  fonksiyonun entegrasyon süresini,  $\tau$  ise  $f(t)$  nin  $f(t + \tau)$  durumunu alması için  $t$  boyutunda «gecikme» yahut «kaydırılma» süresini gösterir. Bir  $f(t)$  fonksiyonunun otokorelasyon fonksiyonu  $E(\tau)$  ise,  $E(\tau)$ 'nin Fourier transformunun,  $f(t)$ 'nin spektral yoğunluğunu verdiği Norbert Wiener tarafından ispatlanmıştır. Buna göre,

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (3)$$

otokorelasyon fonksiyonu  $\tau = 0$ 'a göre simetrik bir fonksiyon olduğundan, bunun Fourier transformu, daha basit olarak, bir kosinüs transformuna dönüşür:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (4a)$$

yahut tek yönlü olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir :

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (4b)$$

(4) denklemi «Weiner - Khintchine bağıntısı»dır. Bu denklemden görüleceği gibi, bir fonksiyonun

spektral yoğunluğunu bulmak için önce bu fonksiyonun otokorelasyon fonksiyonu hesaplanır, sonra bunun Fourier transformu bulunur, önemli bir nokta da şudur:  $f(t)$ 'nin ortalama değeri sıfır olmalıdır. Aksi halde  $\langle f \rangle$  fonksiyonu  $\langle f \rangle = 0$  için bir impulsa dönüşür.

## 3. SINIRLI OTOKORELASYON FONKSİYONU : $E_s(\tau)$

Yukarıdaki denklemlerde  $T$  ve  $\tau$  sonsuz büyük olarak alınmışlardır. Bu şekilde hesaplanan  $E(\tau)$  ve  $\Phi(\omega)$  sırasıyla  $f(t)$ 'nin hakiki otokorelasyon ve spektral yoğunluk fonksiyonlarını verirler.

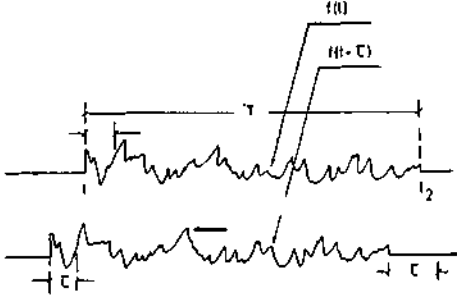
Uygulamada ise bir rastgele fonksiyonun ancak *amirli* bir kısmını elde etmek mümkün olabileceğinden,  $T$  ve  $\tau$  da sınırlıdır.  $T$  uzunluktaki sınırlı bir rastgele fonksiyonun «sınırlı otokorelasyon fonksiyonu»  $E_s(\tau)$  aşağıdaki (5) denklemden, ve spektral yoğunluğu da (6) denklemden hesaplanır :

$$E_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t) \cdot f(t+\tau) dt \quad (5)$$

$$\Phi_s(\omega) = \int_0^{\infty} E_s(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (6)$$

(5) denkleminde  $T$  entegrasyon süresi önemlidir.  $T$  istenildiği kadar büyük alınabilir, fakat istenildiği kadar kısaltılamaz. Teorik olarak  $T$ ,  $f(t)$  içindeki en düşük frekans periyodunun en az 10 katı olmalıdır, ve işaret/gürültü oranı düştükçe  $T$  in de 1 - 2 kat artırılması gerekir [4]. Ayrıca,  $T_m/T$  oranı da % 5 veya daha küçük yapılmalıdır. Burada  $T_m$  maksimum gecikmenin mutlak değerini gösterir ( $T_m = |T_m|$ ). Bundan başka, daha önce de işaret edildiği gibi,  $f(t)$ 'nin sıfırdan farklı  $f$  gibisi bir ortalama değeri varsa ilk önce bu ortalama değer  $f(t)$ 'den çıkarılmalıdır. Bu şartlar sağlandığı takdirde hesaplanan  $E_s(\tau)$ , hakiki  $E(\tau)$  dan pek farklı olmaz. Bu sebeple uygulamalarda genellikle bu şartlar sağlanmak suretiyle otokorelasyon fonksiyonu (5) denklemden, ve yaklaşık sonuçların yeterli olarak kabul edilebileceği hallerde spektral yoğunluk (6) denklemden hesaplanmaktadır.

Şekil 1'den görüleceği gibi,  $|T|$  büyüdükçe entegrasyon süresi ( $=T - |\tau|$ ) küçüldüğünden, sınırlı



SEKIL 1 SINIRLI OTOKORELASYON FONKSİYONUNUN ELDE EDİLMESİ

otokorelasyon fonksiyonu, daha doğru olarak, aşağıdaki (7) denkleminde hesaplanmalıdır :

$$B_s(T) = \frac{1}{T - |\tau|} \int_{-T+|\tau|}^{T-|\tau|} f(t) \cdot f(t + \tau) dt$$

$T_m$  « T için (5) ve (7) denklemleri hemen hemen aynı sonuçları verirler.

#### 4. «PENCERE» FONKSİYONU

Her ne kadar yukarıda açıklanan şartlar sağlandığında  $E_s(\tau)$  ile  $E(\tau)$  arasındaki fark çok küçülürse de aynı şey  $\hat{E}_s(\omega)$  ile  $\hat{E}(\omega)$  için söylemez. Çünkü, Şekil 2'den

$$E_s(T) = B_s(T) P(T)$$

$$= \begin{cases} K \hat{E} & |T| < T_m \text{ için} \\ 0 & |T| > T_m \text{ için} \end{cases} \quad (8)$$

olduğu görülür. Böylece, sınırlı bir  $f(t)$ 'nin spektral yoğunluğu (8) denkleminin Fourier transformına eşit olup

$$\hat{E}_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}(\omega) \cdot P(\omega) d\omega \quad (9)$$

ile verilir.

Ayrıca,  $f(t)$  grubunun ergodik özelliğinden dolayı (9) denkleminde

$$\hat{E}_m(\omega) = \hat{E}(\omega) \star P(\omega) \quad (10)$$

olduğu gösterilebilir.

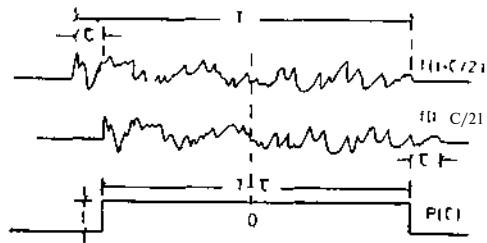
Yukarıdaki denklemlerde  $P(\tau)$  «gecikme penceresi»dir.  $P(\omega)$  ise «spektral pencere» olup  $P(\tau)$ 'nin Fourier transformudur ve ikisi birlikte bir pencere çifti teşkil ederler.  $\hat{E}(\omega) \star \hat{E}_m(\omega)$  grup ortalamasıdır ve \* işareti «konvolüsyon» işlemini gösterir. Yukarıdaki (10) denklemini çok önemli bir sonucu açıklamaktadır : Buradan görüleceği gibi  $\hat{E}(\omega)$ 'nin grup ortalaması olan  $\hat{E}_m(\omega)$ ,  $f(t)$ 'nin hakiki spektral yoğunluk fonksiyonu olan  $\hat{E}(\omega)$ 'nin  $P(\omega)$  ile «düzgünleştirilmiş» şeklinden ibarettir.

Buradan şu önemli sonuca varılır : Uygun bir pencere fonksiyonu kullanmak suretiyle  $f(t)$ 'nin T uzunluğundaki bir kusbandan aynı  $f(t)$ 'nin T > .oo için spektral yoğunluğu çok yakın olarak hesaplanabilir (Böyle bir işlem  $E_s(\tau)$  ile  $E(\tau)$  arasındaki farkı daha da arttırdığı halde  $\hat{E}_m(\omega)$  yi  $\hat{E}(\omega)$ 'ye  $5^{\circ}$  yaklaştırır.

$$f(t - \tau) \cdot f(t + \tau) dt$$

(7)

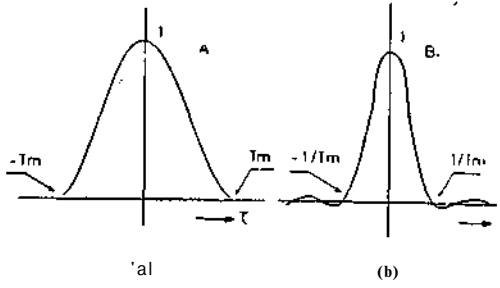
Hesaplama işlemi iki türlü yapılabilir : Uygun bir pencere fonksiyonu  $P(\tau)$  seçildikten sonra, a. önce  $E_m(\tau) = E_s(\tau) \cdot P(\tau)$  çarpını işlenir ve sonra bunun Fourier transformu bulunur. b. Yahut, önce  $E_s(\tau)$  ile  $P(\tau)$ 'nin ayrı ayrı Fourier transformları alınır ve sonra bulunan Fourier transformlarının konvolüsyon işlemi yapılır.



SEKIL 2 SINIRLI OTOKORELASYONUN ELDE EDİLMESİNİ VE GECİKME PENCERESİNİ GÖSTEREN PRENSİP SEMASI

(8) ve (9) denklemlerinden de görüleceği gibi her iki yöntem de aynı sonucu verirler; fakat uygulama bakımından (a)'daki yol analog hesaplamalar için, (b) deki yol ise sayısal hesaplamalar için daha uygundur.

Uygun bir pencere fonksiyonu Şekil 3'de görüldüğü gibi az çok yarım kosnüs dalgası şeklinde, ve konvolüsyon işleminde etkilerinin mümkün



ŞEKİL 3 PENCERE FONKSİYONLARI  
(a) CECİKME PENCERESİ  
(b) SPEKTRAL PENCERE

olduğu kadar az olması için yan karıncıkları (side lobes) çok küçük olmalıdır. Bunun için çaiğltli pencere fonksiyonları teklif edilmiştir. Uygun iki pencere fonksiyonunun denklemleri aşağıda, ve şekilleri de Şekil 4'de verilmiştir.

(a) «Hanning» penceresi:

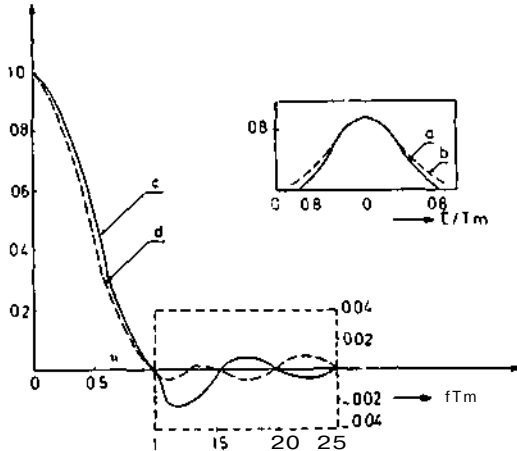
$$P_1(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{\pi}{T_m} \tau \right) \right] \quad \dots \quad |\tau| < T_m \text{ için} \quad (10)$$

$$= 0 \quad \dots \quad |\tau| > T_m \text{ için}$$

(b) «Hamming» penceresi :

$$P_2(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1.08 + 0.92 \cos \left( \frac{\pi}{T_m} \tau \right) \right] \quad \dots \quad |\tau| < T_m \text{ için} \quad (12)$$

$$= 0 \quad \dots \quad |\tau| > T_m \text{ için}$$



ŞEKİL 4 HANNING VE HAMMING GECİKME PENCERELERİ

- (a) HANNING
- (b) HAMMING
- (c) HANNING
- (d) HAMMING

Şekil 4'den de -görüreceği gibi, Hanning penceresinde yan karıncıklar gittikçe küçüldüğünden bunların konvolüsyon yoluyla spektral yoğunluk üzerine yansıyan zararlı etkileri de gittikçe azalır. Bu sebeple, özellikle spektral yoğunluk grafiğinde fazla sayıda ve oldukça büyük maksimalar bulunduğu hallerde, Hanning penceresinin kullanılmasa daha uygun olur.

## 5. EŞİT ARALIKLI BASTGELE SERİ HALİ

Sürekli bir  $f(t)$  rastgele fonksiyonunun spektral yoğunluğu analog olarak yukarıda anlatılan şekilde hesaplanır. Spektral yoğunluğun bilgisayar ile hesaplanmasında aynı yol izlenmekle beraber, İşlem aşağıdaki şekilde yapılmalıdır :

1. Spektrumun ( $f_{min}$  -  $f_{max}$ ) bandı içindeki yoğunluğu hesaplanacaksa, önce  $f(t)$  uygun bir filtreden geçirilerek bu band dışında kalan bütün istenmeyen frekanslar süzülür. Bu süzme işlemi analog hesaplamalar için de zorunludur.

2.  $f_n$  g  $f_{nmax}$  olacak şekilde bir  $f_n$  «Nyquist frekansı», (veya «katlanma frekansı») ile, bu frekansın

$$\Delta t' = \frac{1}{2f_n} \quad (13)$$

ile belirlediği bir zaman aralığı' seçilir.

1 ve 2 adımları iyi uygulanmadığı takdirde sayısal hesap sonuçları, frekans katlanması sebebiyle, spektrumun yüksek frekans ucuna doğru gittikçe yükselen yanlış değerler verir.

3.  $f(t)$ 'nin  $T_n = n \cdot \Delta t'$  süreli bir kısmı üzerinden  $\Delta t'$  eşit aralıklarıyla  $(n + 1)$  tane değer okunur. Böylece  $K^{\wedge}$ ,  $X_1, x_2, \dots, x_n$  rastgele serisi meydana getirilir (Şekil 5). Bu serinin  $\bar{x}$  gibi bir ortalama değeri bu ortalama değer  $\bar{x}$ ,

rastgele serisinin herblr teriminden ayn ayn çıkarılarak sıfır ortalama değerli bir rastgele seri haline getirilir. (Daha önce de açıklandığı üzere,  $T_n$  süresi  $f_m$  in periyodunun en az on katı kadar olmalıdır).

4. Bu seri sırasıyla  $\tau v = 0, At, 2At, \dots, m. At$  kadar kaydırılmak suretiyle, herblr  $\tau$  değeri için bir tane olmak üzere, aşağıdaki (14) denkleminde  $(m + 1)$  tane otokorelasyon değeri,  $C_r = C_0, C_1, C_2, \dots, C^{\wedge}$  hesaplanır.

$$C_r = \frac{1}{n-r} \sum_{i=0}^{i=n-r} (x_i - \bar{x}) (x_{i+1} - \bar{x}) \quad (H)$$

Bu denklemde  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  ve  $r = 0, 1, 2, \dots, m$  olup maksimum kaydırma  $T_m = m. At$  dir. Hesaplanan  $C_r$  otokorelasyon değerleri  $At$  aralıklı yeni bir rastgele seri meydana getirirler ( $\tau$ 'nun  $0, At, 2At, \dots, m. At$ 'den farklı değerleri için  $C_r$  hesaplanamaz).

5.  $C_r$  rastgele serisinin Fourier transformu hesaplanır. Bu işlem ( $\hat{f}$ -S) serisinin «ham» spektral yoğunluk serisini verir. Bu yeni rastgele seri  $P - "P P P P$

olup  $Af = f_n/m$  eşit aralıklı  $(m + 1)$  terimi vardır.  $P_r$  değerleri (14) denkleminin Fourier transformu olan aşağıdaki (15) denklemden hesaplanır.

$$P_r = At \cdot \left[ C_0 + 2 \cdot \sum_{q=1}^{(m-1)} C_q \cdot \cos \frac{\pi \cdot r \cdot q}{m} + C_m \cdot \cos \pi \cdot r \right] \quad (15)$$

Bu denklemde  $r = 0, 1, 2, \dots, m$  ve  $q = 1, 2, 3, \dots, (m - 1)$ .

6.  $P_r$  rastgele serisinin uygun bir spektral yoğunluk pencere fonksiyonu üe konvolüsyon İşlemi yapılarak  $\langle x_i - \bar{x} \rangle$  serisinin «doğru» spektral yoğunluk değerlerini veren  $R_r$  serisi hesaplanır. Bu yeni rastgele sert

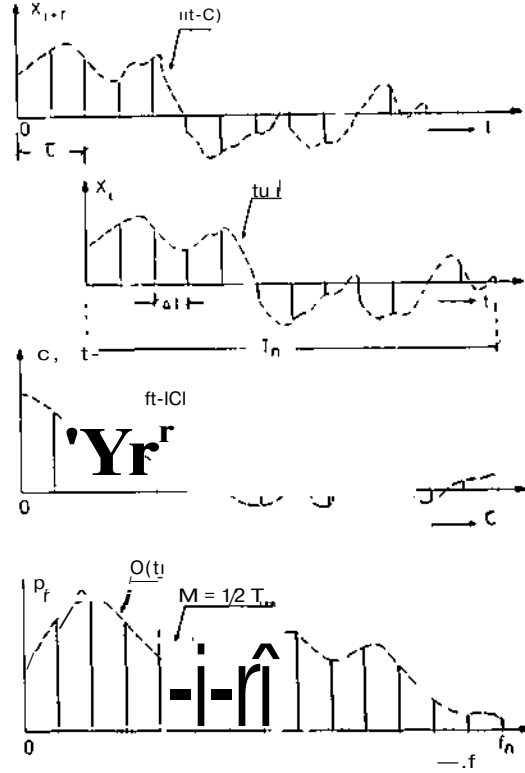
$$R_r = R_{1r} R_2 \dots, R_{m-1} \quad (16)$$

olup  $Af = f_n/m$  eşit aralıklı  $(m - 1)$  terimi vardır. (Konvolüsyon işlemi sebebiyle  $R_0$  ve  $R_m$  kaybedilmiş olur). «Hanning» penceresi ile konvolüsyon işlemi aşağıdaki kısa denkleme dönüşür :

$$R_r = 0.25 P_{r-1} + 0.50 P_r + 0.25 P_{r+1} \quad (17)$$

«Hamming» penceresi ile aynı işlem (18) denkleminde dönüşür :

$$R_r = 0.23 P_{r-1} + 0.54 P_r + 0.23 P_{r+1} \quad (18)$$



SEKİL 5 EŞİT ARALIKLI BİR RASTGELE SERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Böylece, (17) yahut (18) denklemden istenen spektral yoğunluk eğrisinin  $(m - 1)$  noktası elde edilmiş olur.

örnek :  $f(t)$  random fonksiyonunun spektrumu  $(0 - 150)$  Hz bandını kaplıyor.  $T_m/T_n = \% 5$  alınarak, spektral yoğunluk eğrisini çizmek üzere, eğrinin eşit aralıklı 39 noktası hesaplanacak.

Çözüm : 1.  $R_{m-1} = R_{39}$  olması İsteniyor (16 ifadesine bak), o halde  $m = 40$  alınacaktır.

$$2. \frac{T_m}{T_n} = \frac{m \cdot At}{n \cdot At} = \frac{m}{n} = \% 5 \text{ ve}$$

riliyor.

O halde  $n = 800$  alınacaktır.

3. \*ma» " =  $15^\circ$   $H^2$  veriliyor. Buna göre,  $f_0 = 160$  Hz alınacaktır. Buradan,  $\Delta t = \frac{1}{2f_n} = \frac{1}{320}$  saniye olur.

4. Böylece,  $f(t)$ 'nin  $T_n = n \cdot \Delta t = 2,5$  saniye süreli bir kısımdan  $A = \frac{1}{320}$  saniye aralıklarla  $n + 1 = 801$  değer alınarak  $S_t = X_1, X_2, D_{ij}, \dots, X_{800}$  serisi meydana getirilecektir.

5. Spektral yoğunluk eğrisindeki frekans aralıkları  $\Delta f = f_n/m = 160/40 = 4$  Hz olacaktır.

Bilgisayar kullanarak herhangi bir rastgele fonksiyonun  $T_m/T_r = \% 5$  ile spektral yoğunluk eğrisinin eşit aralıklı 39 noktasını elde etmek üzere aşağıdaki Fortran programı hazırlanmıştır :

```
DIMENSION X(800)* SUMC(41)* POWER<40>
DO 11 J=1*800
11 READ (1.12) X(J)
12 FORMAT (F3.0)
AVE = 0.0
DO 13 L=1>800
13 AVE = AVE * X(L)
AVE = AVE/800.
DO 14 M = 1.800
14 X(M) = X(M) - AVE
DO 15 I=1.41
15 SUM(I) = 0.0
DO 17 M=1*41
N = 801 - M
DO 16 I=1>N
J = I + M - 1
16. SUM(M) = SUM<M> + X(I)*X(J)
17 SUM(M) = SUM(M)/M
WRITE (3*300) <K, SUM(K)# K=1*41)
300 FORMAT (IH *I8* E20.6)
DO 18 J=1*40
18 POWER(J) = 0.0
DO 20 J=1*40
DO 19 I=2.40
M = (I - 1)*J
19 POWER(J) = POWER(J) + 2.*SUM(I)*COS(0.078539816*M)
20 POWER(J) = POWER(J) + SUM(I) * (-1)**U)*SUM(41)
DO 21 J=2.39
21 POWER(J) = (t .25*POWER(J-1) + 0.5*POWER(J)+0<25*POWER(J+1)))/3.
WRITE (3#400) (I * POWER(K). K=2.39)
400 FORMAT (IH # 18. E20.6)
STOP
EMO
```

Spektral yoğunluk grafiğinin çizilebilmesi için 39 nokta yeterli bulunmuyorsa İlk seçilen katlanma frekansından az farklı yeni bir katlanma frekansı seçilerek yukarıda anlatılan işlemler tekrarlanır. Bu suretle eşit aralıklı 39 nokta daha bulunmuş olur.

örneğin, yukarıdaki örnek problemde  $f_n = 180$  Hz alınarak spektrumun  $\Delta f = 180/40 = 4,5$  Hz aralıklı 39 noktası daha elde edilir, ( $f_{max} = 150$  Hz olduğundan 150 Hz'den sonraki noktalar sıfır değerlidir). Bu işlem istenildiği kadar tekrarlanarak spektrumun istenildiği kadar çok sayıda noktası elde edilebilir.

Bilgisayar kullanarak spektral analiz yapılırken işlem  $f_n$  katlanma frekansının ötesinde devam ettirilmemelidir. Çünkü bu lüzumsuz bir işlem olacağı gibi, frekans katlanması nedeniyle, spektrum sonsuza kadar devam ediyormuş gibi bir sonuç vereceğinden yanıltıcı da olabilir.

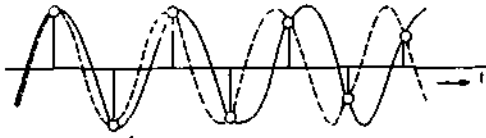
## 6. FREKANS KATLANMASI (ALİASİNG)

At eşit aralıklı bir rastgele serinin spektral analizinde «frekans katlanması», önlenmesi mümkün olmayan bir özelliktir. Bu özellik sebebiyle x, serisinin (O-f-nu,) içindeki herhangi bir  $f_i$  frekansı

$$f_a = (2k \cdot f_n + f_1) \cdot$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (19)$$

ile verilen sonsuz sayıdaki  $f_i$  frekanslarından ayırt edilemez. Bu durumu aydınlatmak üzere At eşit aralıklı a, b, c, d... noktalarının hem  $f_j$  hamı de  $f_2$  frekanslı ayrı iki sinüs eğrisi üzerinde bulunabileceği Şekil 6'da gösterilmiştir. Aynı a, b, c, d... noktalarından frekansları (19) denklemi üe ve^len sonsuz sayıda sinüs eğrisi geçirilebilir.



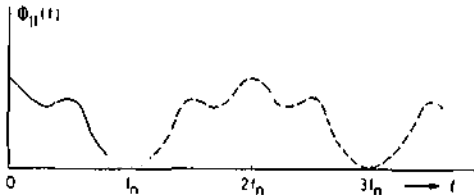
SEKİL 6 FREKANS KATLANMASININ SEBEBİNİ AÇIKUYAN SEMA

EŞİT ARALIKLI DEĞERLER BİRBİRİNDEN AYRI İKİ SİNÜS EĞRİSİ ÜZERİNDE BULUNABİLİRLER

1

Denklem (19)'da  $f_n = \frac{1}{2At}$  olup  $2k \cdot f_n$  ise «kat-

lanma frekanslarını gösterir. Serinin (0-f,...) bandını kaplayan gerçek spektrumu, Şekil 7'de görüldüğü gibi, bu katlanma frekanslarında ters yönde katlanarak sonsuz kadar kendisini tekrar eder. Buradan görüleceği gibi, serinin gerçek spektrumu (0 -  $f_{mM}$ ) cMuğu halde, hesap işlemine devam edildiği takdirde, sonsuz uzunlukta periyodik bir spektrum elde edilir. Bu sebeple işlemin  $f_n$ 'den daha ileriye yürütülmesinde hiçbir fayda olmadığı gibi, yanıltıcı bilgi sağlaması ve



SEKİL 7 FREKANS KATLANMASI  $f_{max} = f_n$  halde

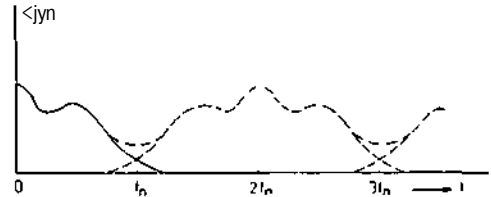
— GERÇEK SPEKTRUM  
— KATLANAN ... (ZAHİRİ)

hesap işlemini uzatması sebebiyle aksine zararlı da olabilir. Ancak,  $f_{max} = f_n$  alınmışsa (yahut

$f(t)$ 'ye  $f_n$  ötesinde istenmeyen gürültü işaretleri katlanırsa) hesap işleminin  $f_n$  de durdurulması, frekans katlanmasının zararlı etkisini önleyemez. Çünkü bu koşullar altında hesaplanan spektral yoğunluk grafiğinin  $f_n$  ile  $f_{mM}$  sınırları arasında kalan kısmı, gerçek spektrum ile  $2f_n$ 'de katlanan spektrum değerlerinin toplamına eşit olacaktır ve gittikçe artan değerler yerir. (Şekil 8). Bunu önlemek için  $f_{ma}$ 'dan büyük bütün frekansların süzülmesi ve At aralığının da

$At = \frac{1}{2f_n} \cdot \frac{1}{2f_{nw}}$  olacak şekilde seçilmesi zorun-

ludur. Bu sebeple, spektral yoğunluğun bilgisayar ile hesaplanmasında  $f_n$  ye yaklaştıkça hesaplanan değerlerde gittikçe bir yükselme görülüyorsa frekans katlanması ihtimali düşünülerek  $f_n$  seçiminin (ve filtre ayarının) yeniden gözden geçirilmesi gerekir.



SEKİL 8 FREKANS KATLANMASI  $f_{max} = f_n$  halde

— GERÇEK SPEKTRUM  
— KATLANAN  
— HESAPLANAN YANILTICI KISIM

## 7. ÖN DÜZLEME (PREWHITENİNG)

Ön düzleme, bir rastgele fonksiyonun  $\hat{I}(\omega)$  spektral yoğunluk grafiğini az çok yatay duruma getirme işlemidir. Tam yatay yapmak şart değildir:  $\hat{I}(\omega)$ 'nin  $M$  ile değişimini yavaşlatmak,

$\frac{d}{d\omega} \hat{I}(\omega)$  'yi küçük yapmak yetiştir.

Ön düzleme, spektrum ölçme sonuçlarını daha güvenilir yapması, ve işaret/gürültü oranını yükseltmesi bakımından faydalı bir işlemdir. Ancak, bütün ölçme ve hesaplar ön düzlemeli olarak tamamlandıktan sonra karşıt işlem (dewhitening) uygulanarak esas spektruma geçilmesi gereklidir.

Sürekli işaretlerin ön düzleme işlemi, bu işaretleri uygun analog filtrelerden geçirmek suretiyle uygulanır, işlem, ölçme zincirinin mümkün olduğu kadar ilk katlarında uygulanmalıdır. Bir rastgele seriye de sayısal olarak ön düzleme işlemi uygulanabilir. Ancak, bu halde işlemin esas gayesi spektral penceredeki yan karıncıkların, hesap işlemi yoluyla spektrum üzerindeki zararlı etkisini azaltmaktır.

Esas spektrum  $f_{mat}$  a doğru gittikçe azalıyor, ki genellikle böyledir, uygun bir sayısal ön düzleme işlemi aşağıdaki şekilde uygulanır :

Ortalama değeri sıfırlanmış bulunan  $x_i$  rastgele serisinden

$$x'_i = x_i - \alpha \cdot x_{i-1} \quad (20)$$

denklemine göre yeni bir  $x_i$  rastgele serisi meydana getirilir. Burada  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ . Bu yeni  $x_i$  serisinin  $R_r$  spektrumu hesaplanır. Bu şekilde hesaplanan  $R'_r$ , esas  $x_i$  serisinin istenen sayısal ön düzlemeli spektrumdur, ve

$$R'_r = R_r \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 + a - 2.a.\cos \frac{\pi r}{m} \end{array} \right] \quad (21)$$

ile verilir. Bu denklemde  $a$  değeri genellikle sıfır ile (-1) arasında bulunan bir sayıdır,  $r = 0, 1, 2, \dots, m$  olup  $m$  ise  $T_{m-1} = m$ . At deki  $m$  dir.  $\backslash \backslash$  büyüdükçe ön düzleme etkisi de büyür. Denklem (21) de

$$Z_r = 1 + a^2 - 2.a.\cos \frac{\pi \cdot r}{m} \quad (22)$$

alınırsa, (21) denklemi (23) şeklinde yazılabilir.

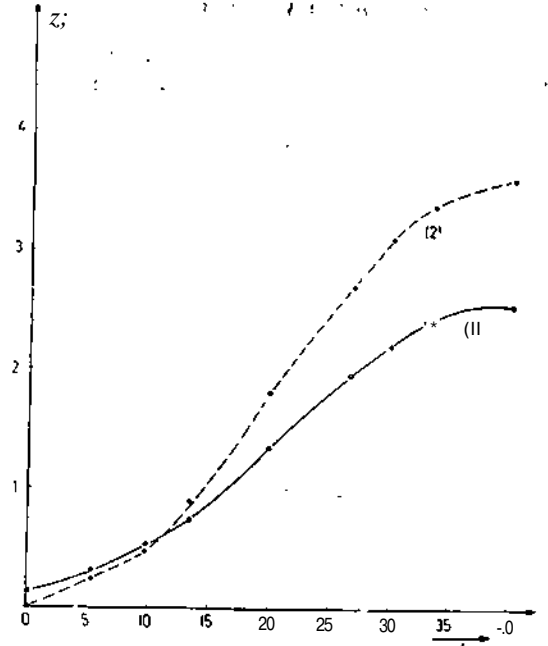
$$R'_r = R_r \cdot Z_r \quad (23)$$

Şekil 9'da  $Z_r$  nin  $r$  ile değişimi gösterilmiştir. Kalın olarak çizilen eğri  $a = -0,6$  alınarak noktalı çizilen eğri ise  $a = -0,9$  alınarak çizilmiştir. Bu eğriler  $r = 0, 1, 2, \dots, 39$  için çizilmiş olduğundan 39 nokta ile hesaplanacak olan bütün spektral yoğunluk hesaplarında kullanılabilir. Bu ( $Z_r - T$ ) grafiğinden görüleceği gibi bu şekilde uygulanan bir ön düzleme işlemi spektral yoğunluğun düşük frekans tarafındaki genlikleri gittikçe azaltır, yüksek frekans yönündekileri de gittikçe artırır. Yukarıda anlatıldığı şekilde  $R_r$  hesaplandıktan sonra bulunan değerlerin herbiri aynı  $r$ 'ye tekbül eden  $Z_r$  değeri ile bölünerek esas  $R_r$  spektrumuna dönülür :

$$\bar{R} = \frac{\bar{R}'}{Z} \quad (24)$$

$Z_r$ 'nin istenilen değerleri Şekil 9'daki grafikten okunabilir, yahut (21) denktekinden hesaplanarak bulunur, (ön düzleme işlemi spektrumun baş ve son uçlarındaki birer değer noktasının kaybına sebep olur).

ön düzleme ve karşıt ön - düzleme işlemleri yukarıda verilen Fortran programına dahil edilmiştir, işletildiğinde bu işlemler aynı programa kolayca eklenebilir.



Şekil 9. ön düzleme eğrileri :  
- (1)  $a = -0,6$  için  
- (2)  $a = -0,9$  için

#### KAYNAKLAR

- [1] H. Bengi : «On the Spectral Analysis of Random Processes by Autocorrelation» O.D.T.Ü. Ekim 1968.
- [2] Y. W. Lee : «Statistical Theory of Communication», Wiley, New York (1960).
- [3] R. B. Blackman and J. W. Tukey : «The Measurement of Power Spectra From the Point of View of Communications Engineering», Dover Publications, Inc. New York (1958).
- [4] N. A. Anstey : «Introduction to Correlation Techniques», Seismograph Service (England) Ltd. (1963).
- [5] J. D. Robsoa : «An Introduction to Random Vibrations», Edlnburgh University Press (1963).
- [6] N. F. Barber: «Experimental Correlograms and Fourier Transforms», Pergamon Press Oxford (1861).
- [7] Y. W. Lee ve J. B. Wiesner : «Correlation Functions and Communications Applications» Electronics (June 1950).
- [8] G. A. Korn : «Randam - Process Simulation and Measurements», McGraw-Hill Co. New York (1966).
- [9] B. Grand, et al : «Using Digital Techniques in L. F. Spectrum Analysis», Electronics (Nov. 1960).
- [10] M. R. Schroeder and B. S. Atal: «Generalized, Short-Time Power Spectra and Autocorrelation Fonctions», J.A.S.A. (Nov. 1962).