

LİNEER OLMAYAN ELEKTRİK DEVRELERİNİN DT YÖNTEMİYLE ANALİZİ

Saadetdin HERDEM¹ Teymuraz ABBASOV² Muhammet KÖKSAL³

¹: Niğde Üniversitesi, Mühendislik-Mim. Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
51200 Niğde, sherdem@nigde.edu.tr

²: İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
44100 Malatya, tabbasov@inonu.edu.tr

³: Fatih Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü
34500 İstanbul, mkoksal@fatih.edu.tr

Anahtar sözcükler: RC devresi, DT yöntemi, Lineer olmayan direnç, Transient analiz

ÖZET

Bu çalışmada, lineer olmayan elemanlar içeren elektrik devrelerinde transient rejimlerin analitik ve nümerik olarak incelenmesinde Diferansiyel Dönüşümün kullanılabilirliği incelenmiştir. Lineer devreler için kullanılan analiz yöntemlerinin DT yöntemi yardımıyla lineer olmayan elektrik devrelerinde de kullanılabilmesi ve bunun sağlayacağı avantajlar gösterilmiştir. Bu yöntemle incelenen transient rejimlerin hem yaklaşık analitik çözümlerinin hem de nümerik (spektrumlar şeklindeki) çözümlerinin elde edilmesi mümkündür. Örnek olarak bir kapasitansın lineer olmayan bir direnç üzerinden deşarjı olayında akımın değişimi ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlar literatürdeki bilinen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

1. GİRİŞ

Lineer olmayan elektrik devrelerinin incelenmesinde çeşitli yaklaşım yöntemleri kullanılmaktadır [1]. Özel durumlarda etkin olan bu yöntemler genel olarak lineer olmayan devrelerin analizinde pek kullanışlı olmayabilmektedirler. Bu nedenle lineer olmayan elektrik devrelerinin incelenmesinde daha kullanışlı ve genel yaklaşık hesaplama yöntemlerinin geliştirilmesi önem arz etmektedir. Böyle yöntemlerden biri de Puhov tarafından önerilen ve Genelleştirilmiş Klasik (GK) yöntem olarak da adlandırılan Diferansiyel Dönüşüm (DT) yöntemidir [2-6]. Diferansiyel spektrumları içeren bu yöntemde belli sınırlar çerçevesinde lineer olmayan sistemler üzerinde lineer sistemlere ait olan yöntemleri uygulayarak problemin hem yaklaşık analitik, hem de nümerik (spektrumlar) çözümlerinin elde edilmesi mümkündür. Analitik çözümleri belli olan problemlerin sonuçlarının bu yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmasıyla DT yönteminin geçerliliğinin ve etkinliğinin değerlendirilmesi yapılabilmektedir.

Bu çalışmada, lineer olmayan elektrik devrelerinde transient rejimlerinin hesaplanmasında DT yönteminin

kullanımı incelenmiştir. Örnek model olarak lineer olmayan direnç içeren RC devresinde kapasitörün deşarj olayı seçilmiştir. Bu devrede transient rejimde akımın değişimi belirlenmiştir.

Sıcaklıkla değişen direnç içeren RC devresinde transient rejimde akımın değişiminin analitik ifadesi daha önce de belirlenmiştir [7]. Lambert W-fonksiyonu içeren bu yaklaşık çözüm uzun matematiksel ifadeler içermektedir ve genel bir yöntem de değildir. Örneğin lineer olmayan R içeren bir RLC devresi için sıfır başlangıç koşullarda bile problemin bu yöntemle çözümünün zor olduğu görülmektedir. DT yöntemiyle bu durumlarda problemin yaklaşık çözümleri elde edilebilmektedir. İncelenen problemin özelliği dikkate alınarak yaklaşık transient durum fonksiyonunun analitik yapısının önceden seçilmesi problemin çözümünü kolaylaştırmaktadır.

2. DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

İncelenen sistemin durumu

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[t, x(t)], \quad x(0) = X_0, \quad (1)$$

diferansiyel denklemlerle veya eşdeğer entegral denklemlerle

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f[\tau, x(\tau)] d\tau \quad (2)$$

verilmiş olsun. Burada $x(t)$ ve $f(t, x(t))$ temel fonksiyonlardır ve $x(0)$ $x(t)$ fonksiyonunun $t=0$ için başlangıç değeridir.

Eğer Dk.1 veya Dk.2'nin çözümü tek ise o zaman çözümün iki bileşenden oluştuğu varsayılabilir.

$$x(t) = X_s(t) + X_T(t) \quad (3)$$

Burada $x_s(t)$ kalıcı bileşen, $x_T(t)$ ise yardımcı bileşen adını alır [2-6]. Fiziksel sistemlerde kalıcı bileşen olarak sistemin zamanla ($t \rightarrow \infty$) kararlı hale gelen fonksiyonu seçilebilir. Bu, başlangıç anından ($t=0$)

bağımsız ve sınırlı bir genliğe sahip olan fonksiyonel yapısı tek olan bir fonksiyondur.

Genel olarak kalıcı bileşen, verilen denklemin yaklaşık olarak bir özel çözümüne eşit olarak da seçilebilir. Yardımcı bileşen $x_T(t)$ 'nin analitik yapısı öyle seçilmelidir ki, bu fonksiyonu temsil eden yaklaşık fonksiyon $x_T(t,c)$ tam ve sönümlü olsun. Burada $c=c_0, c_1, \dots, c_n$ belirsiz katsayılarıdır ve sistemin özelliğine bağlı olarak belirlenirler. Bu katsayıların belirlenmesi için DT yönteminden yararlanılabilir. Bu amaçla Dk.3'ün diferansiyel Taylor spektrumları elde edilir.

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \\ X_s(k) &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x_s(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \\ X_T(k) &= \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x_T(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \end{aligned} \quad (4)$$

Burada H (sabit) skala faktörüdür. Eğer $f[t,x(t)]$ fonksiyonunun DT spektrumlarının $F(k)$ olduğu kabul edilirse, Dk.1 veya Dk.2'den $X(k)$ spektrumları $[X(0), X(1), \dots, X(n)]$ kolaylıkla belirlenebilir. Burada DT yöntemine uygun olarak fonksiyonların diferansiyel spektrumları formül veya tablolardan belirlenir [2-6].

İncelenen problemin karakterine ve başlangıç koşullarına göre yardımcı fonksiyonun yapısı (rasyonel kesir, eksponent, Fourier serisi vb.) seçilir $x_T(t,c) = x_T[t, C_0\beta_0(t), C_1\beta_1(t), \dots, C_n\beta_n(t)]$ (5)

Dk.3, 4 ve 5'den lineer olmayan problemin spektrum denklemini elde ederiz.

$$X(k) = X_s(k) + X_T[T(k), C_0B_0(k), \dots, C_nB_n(k)] \quad (6)$$

Burada $B_0(k), B_1(k), \dots, B_n(k)$ seçilmiş $\beta_0(t), \beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$ fonksiyonlarının diferansiyel spektrumlarıdır. $T(k)$ spektrumu ise

$$T(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k t}{dt^k} \right]_{t=0} = H\delta(k-1) = (0, H, 0, \dots, 0) \quad (7)$$

olarak belirlenir. Bu ifade de yer alan $\delta(k)$ terimi ise

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \text{ için} \\ 0 & k \neq 0 \text{ için} \end{cases} \quad (8)$$

olarak tanımlanmıştır [2-6]. Temel diferansiyel fonksiyondan belirlenen $X(k)$ spektrumlarına ve kalıcı bileşenin spektrumları $X_s(k)$ 'ya göre Dk.6'dan C_n katsayıları belirlenir. Belli C_n katsayılarına göre Dk.5 dikkate alınarak Dk.3'den problemin yaklaşık analitik çözümü elde edilmiş olur. Görüldüğü gibi Dk.3 oluşturulurken lineer olmayan sistemin sadece fiziksel özelliklerinin (başlangıç koşullar, sürekli rejim vb.) dışında hiç bir sınırlama koşulu varsayılmamıştır. Görüldüğü gibi lineer sistemlerdeki transient rejimlerin incelenmesine benzer bir prosedür uygulanmaktadır. Zaten bu nedenle söz konusu yöntem Genelleştirilmiş Klasik (GK) yöntem olarak da adlandırılmaktadır.

3. DT YÖNTEMİNİN ELEKTRİK DEVRELERİNE UYGULANMASI

Örnek olarak lineer olmayan direnç $R(t)$ içeren RC devresindeki kondansatörün deşarj olayı göz önüne alınacaktır. Kaynak yer almayan bu devredeki transient rejimi aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$i(t)R(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt = V_0 \quad (9)$$

Burada V_0 $t=0$ anında kapasitansın uçlarındaki gerilimdir. $i(t)$ deşarj akımının etkisiyle oluşan ısınma sonucu devredeki $R(t)$ direnci zamanla değişir.

Eğer transient rejim süresinde dirençle dış ortam arasındaki ısı transferinin ihmal edilecek kadar az olduğu varsayılırsa, direnç üzerinde oluşan $Q(t)$ ısı miktarı tümüyle direncin ısınması için harcanmış olur. Bu durumda R direncinin T sıcaklığına bağımlılığının lineer olduğu varsayılabilir.

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0(1 + \alpha[T(t) - T_0]) \\ &= R_0 + \frac{\alpha R_0}{C_R} \int_0^t i^2(t)R(t)dt \end{aligned} \quad (10)$$

Burada α direncin sıcaklık katsayısı, R_0 direncin başlangıç değeri, C_R direncin ısı alınganlığıdır.

Dk. 9 ve 10'un türevleri alınarak kondansatörün deşarj olayı için durum denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d[i(t)R(t)]}{dt} + \frac{i(t)}{C} &= 0 \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \frac{\alpha R_0}{C_R} R(t) i^2(t), \quad R(0)=R_0, \quad i(0)=I_0 \end{aligned} \quad (11)$$

Burada $I_0=V_0/R_0$ akımın başlangıç değeridir. Dk.11'i boyutsuz şekilde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{d\theta} + y &= 0 \\ \frac{dx}{d\theta} &= 2\epsilon xy^2 \quad x(0)=1, \quad y(0)=1 \end{aligned} \quad (12)$$

Burada,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{R(t)}{R_0}, \quad y(t) = \frac{i(t)}{I_0} = \frac{R_0}{V_0} i(t), \quad \theta = \frac{t}{CR_0} \\ \epsilon &= \frac{\alpha CV_0^2}{2C_R} = \frac{\alpha Q_{\max}}{C_R} = \alpha \Delta T_{\max} = \frac{R_{\infty} - R_0}{R_0} \end{aligned} \quad (13)$$

Denklemin 13'de yer alan $Q_{\max} = 0.5CV_0^2$ bütün deşarj süresinde direncin aldığı ısı miktarıdır. Bu süre içerisinde direnç değeri R_0 'dan R_{∞} 'a kadar artar.

Denklemin 12'de $\epsilon=0$ olursa R =sabit, yani lineer RC devresinin transient rejimi incelenmiş olmaktadır. Problemin çözümünün daha kolay anlaşılması için Dk.12'de ϵ yerine her zaman 1'den küçük olan q parametresi kullanılabilir.

$$q = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} = \frac{R_{\infty} - R_0}{R_{\infty}} \quad (14)$$

Bu durumda boyutsuz zaman aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\tau = (1-q)\theta = \frac{\theta}{1+\varepsilon} = \frac{t}{CR_\infty} \quad (15)$$

Bu tanımlamalar dikkate alınarak Dk.12 aşağıdaki gibi yazılabilir [7].

$$\begin{aligned} \frac{d(xy)}{d\tau} + \frac{1}{1-q}y &= 0 \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{2q}{(1-q)^2}xy^2, \quad x(0)=1, \quad y(0)=1 \end{aligned} \quad (16)$$

Lineer olmayan diferansiyel denklem olan Dk.12 veya Dk.16, lineer olmayan R içeren RC devresindeki transient rejimin incelenmesine imkan verir. Bu denklemlerin DT yöntemiyle çözümü için Dk.16'nın DT spektrum modeli [2-6] aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H} \sum_{l=0}^k Y(k-l)(l+1)X(l+1) \\ + \frac{1}{H} \sum_{l=0}^k X(k-l)(l+1)Y(l+1) + \frac{1}{1-q}Y(k) &= 0 \quad (17a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{H}X(k+1) &= \frac{2q}{(1-q)^2} \sum_{l=0}^k X(k-l) \sum_{s=0}^l Y(l-s)Y(s), \\ X(0)=1, \quad Y(0)=1 & \quad (17b) \end{aligned}$$

DT yöntemine uygun olarak Dk.16'nın çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x(\tau) = x_s(\tau) + x_T(\tau) \quad (18a)$$

$$y(\tau) = y_s(\tau) + y_T(\tau) \quad (18b)$$

İncelenen problemin özelliğine göre Dk.18'de verilen çözümlerde,

$$x(\tau=0)=1, \quad x(\tau \rightarrow \infty) = \frac{R_\infty}{R_0} = \frac{1}{1-q} \quad (19a)$$

$$y(\tau=0)=1, \quad y(\tau \rightarrow \infty)=0 \quad (19b)$$

olması gerekir. Dolayısıyla,

$$x_s(\tau) = R_\infty/R_0 \quad (20a)$$

$$y_s(\tau) = 0 \quad (20b)$$

olarak belirlenebilir. Yardımcı bileşenler olan $x_T(\tau)$ ve $y_T(\tau)$ fonksiyonel bağıntılarının belirlenmesinde şu kriterlerin dikkate alınması gerekir: Eğer devredeki direncin $R(t)$ zamanla değişimi yaklaşık olarak eksponansiyel şekilde oluşuyorsa, lineer olmayan RC devresinde akımın ve geriliminin zamanla değişimi de eksponansiyel bir fonksiyon olarak seçilebilir. Buna göre yardımcı bileşenlerin fonksiyonel yapısı aşağıdaki şekilde olabilir.

$$x_T(\tau) = C_0 + C_1 e^{-p\tau} \quad (21a)$$

$$y_T(\tau) = \frac{1 + a_1\tau}{1 + b_1\tau + b_2\tau^2} \quad (22b)$$

Burada $C_0, C_1, p > 0, a_1, b_1, b_2$ belirsiz katsayılardır. Dk.21'in DT spektrumları $H=1$ için aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$X(k) = C_0\delta(k) + C_1 \frac{(-p)^k}{k!} \quad (22a)$$

$$Y(k) + b_1Y(k-1) + b_2Y(k-2) = \delta(k) + a_1\delta(k-1) \quad (22b)$$

Denklem 22a'nın $k=0, 1, \dots$ değerlerindeki spektrumları Dk.19 dikkate alındığında aşağıdaki gibi olur.

$$C_0 = \frac{R_\infty}{R_0}, \quad C_0 + C_1 = 1, \quad X(1) = -pC_1 \quad (23)$$

Buradan ve Dk.17b'den hesaplanan $X(l)$ spektrumlarından katsayılar belirlenir.

$$\begin{aligned} C_0 = \frac{R_\infty}{R_0} = \frac{1}{1-q}, \quad C_1 = 1 - \frac{R_\infty}{R_0} = -\frac{q}{1-q}, \\ p = \frac{-X(1)}{C_1} = \frac{2}{1-q} \end{aligned} \quad (24)$$

Bu değerler dikkate alınarak Dk.21a'dan direncin zamanla değişimi boyutsuz şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \exp\left(-\frac{2}{1-q}\tau\right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left[1 - q \exp\left(-\frac{2}{1-q}\tau\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Görüldüğü gibi $x(\tau=0)=1$ ve $x(\tau \rightarrow \infty) = R_\infty/R_0$ sınır koşulları sağlanmaktadır.

Devredeki akımın değişimini incelemek için Dk.17'den sırasıyla $X(k)$ ve $Y(k)$ spektrumları belirlenir.

$$\begin{aligned} Y(1) &= -\frac{(1+q)H}{(1+q)^2}, \quad Y(2) = \frac{H^2(1+8q+q^2)}{2!(1-q)^4}, \\ Y(3) &= -\frac{H^3(1+32q+64q^2+20q^3+3q^4)}{3!(1-q)^6} \end{aligned} \quad (26)$$

Bu spektrumlar Dk.22b'de göz önüne alınarak a_1, b_1 ve b_2 katsayıları kolaylıkla belirlenir.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3q^4 + 8q^3 + 16q^2 - 4q + 1}{3(1-q)^2(q^2 + 4q - 1)}, \\ b_1 &= \frac{3q^4 + 11q^3 + 31q^2 + 5q - 2}{3(1-q)^2(q^2 + 4q - 1)}, \\ b_2 &= \frac{6q^5 + 19q^4 + 24q^3 - 18q^2 + 18q - 1}{6(1-q)^4(q^2 + 4q - 1)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Literatürde [7] Lambert W-fonksiyon yönteminde sonuç ifadeler $E(q^2)$ hatasıyla hesaplanmıştır. Dk.27'de böyle bir yaklaşım söz konusu olduğunda,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-1}{3(1-q)^2}, \\ b_1 &= \frac{2+3q}{3(1-q)^2}, \quad b_2 = \frac{1+22q}{6(1-q)^4} \end{aligned} \quad (28)$$

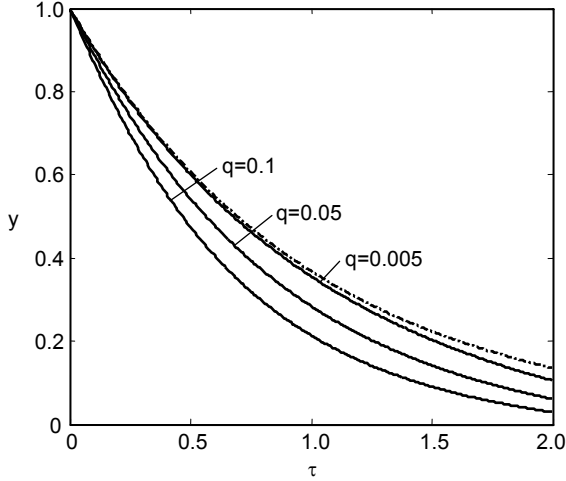
yazılabilir. Bu durumda lineer RC devresinde transient akımının zamanla değişimi Dk.22b'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y(\tau) = \frac{6(1-q)^4 - 2(1-q)^2\tau}{6(1-q)^4 + 2(2+3q)(1-q)^2\tau + (1+22q)\tau^2} \quad (29)$$

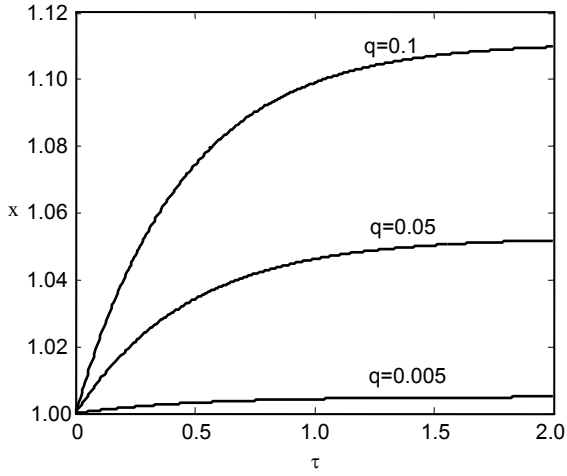
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Sıcaklıkla lineer olmayan şekilde değişen direnç içeren RC devresindeki transient rejimleri DT yöntemiyle inceleyerek, problemin yaklaşık analitik ve nümerik çözümlerini elde etmek mümkündür.

Şekil 1'de RC devresindeki kondansatörün deşarj akımının boyutsuz zamana göre değişimi verilmiştir. Karşılaştırma için grafik üzerinde akımın soğuk dirençli durumdaki ($R=sabit$) değişimi de kesik çizgili olarak gösterilmiştir. Şekil 2'de ise devredeki direncin değerinin yine boyutsuz zamana göre değişimi gösterilmiştir.



Şekil 1 Kondansatörün deşarj akımının boyutsuz zamana göre değişimi



Şekil 2 Direncin boyutsuz zamanla değişimi

Problemin çözümünün gerçek çözüme yakınlığını artırmak için yaklaşık çözümdeki terim sayısını artırmak gerekir. Bunun için Dk.26'da belirlenen DT spektrumlarının sayısını artırmak gerekir.

5. SONUÇ

Diferansiyel spektrum modeli zemininde oluşturulmuş DT (veya GK) yönteminin lineer olmayan elektrik devrelerinin analizinde kullanımı ile ilgili olarak şunlar söylenebilir:

i) Eğer lineer olmayan elektrik devrelerinde kararlı kalıcı rejim varsa ve çözüm tek ise o zaman bu tip elektrik devrelerindeki transient rejimlerin DT yöntemi kullanılarak genel bir prosedürle incelenmesi mümkündür.

ii) DT yöntemi diferansiyel spektrumlar zemininde oluşturulmuş spektral bir modeldir. Bu nedenle elde edilen sonuçlar, hem nümerik olarak spektrumlar şeklinde hem de analitik olarak yaklaşık seri veya fonksiyonel bir bağıntı şeklinde elde edilir.

iii) DT yöntemi lineer olmayan elektrik devrelerinde veya herhangi bir dinamik sistemde oluşan geçici rejimlerin çözümünü kalıcı ve yardımcı bileşenlerden oluşmuş bir fonksiyon şeklinde ele alır. Kalıcı bileşen sistemdeki kararlı duruma göre belirlenebilir. Yardımcı bileşen ise sistemdeki başlangıç koşullarını veya sınır koşullarını veya herhangi bazı koşulları sağlayabilecek bir yaklaşık fonksiyon şeklinde seçilebilir. Bu fonksiyonun içerdiği belirsiz katsayılar sistemin temel diferansiyel denkleminin Diferansiyel Dönüşümünden (DT) elde edilen diferansiyel spektrumlar kullanılarak belirlenir.

iv) Yardımcı bileşen $x_T(t)$ 'nin seçimindeki temel kriterler, bu fonksiyonun başlangıç veya sınır veya herhangi koşulları sağlayabilecek bir tam fonksiyon olmasıdır. Bu nedenle bu bileşenin fonksiyonel yapısı istenilen şekilde (Taylor veya Maclaurin serisi, rasyonel kesir, polinom, eksponent, Fourier serisi vb.) seçilebilir. Buradaki temel ilke, bu fonksiyonların hızlı bir yakınsaklık sağlayabilmesidir.

v) Yardımcı bileşenin içerdiği belirsiz katsayıların bulunmasında temel diferansiyel denklemlerin spektrumlarının nümerik yöntemlerle hesaplanması işlemi hızlandırılabilir. Böylece DT yöntemi, bilgisayarlar ve çeşitli yazılımlar yardımıyla ilk ortaya atıldığı zamanlara göre günümüzde daha geniş uygulama alanları bulabilmektedir.

vi) DT yöntemi, sadece durumları lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen dinamik sistemler için değil, aynı zamanda durumları lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemler için de geçerlidir.

KAYNAKLAR

1. Bogolyubov, H. H., Mitropolskiy, Y. A., Asymptotic methods in non-linear vibration theory, Nauka Ed., Moscow, 1974.
2. Puhov, G. E., Differential Transforms of functions and equations, Naukova Dumka Ed., Kiev 1980.
3. Puhov, G. E., Differential analysis of electrical circuits, Naukova Dumka Ed., Kiev, 1982.
4. Puhov, G. E., Taylor transformation application in electrical and electronics, Naukova Dumka Ed., Kiev, 1978.
5. Puhov, G.E. Differential spectra and models, Naukova Dumka Ed., Kiev 1990.
6. Köksal, M. and Herdem, S., Analysis of Nonlinear Circuits by Using Differential Taylor Transform, Computers & Electrical Engineering, vol. 28/6, pp. 513-525, 2002.
7. Baligin, B. S, The transient current when a capacitor is discharged (or charged) an a resistor whose resistance linearly depends on the temperature, Electrical, No. 7, pp. 68-71, 2002.