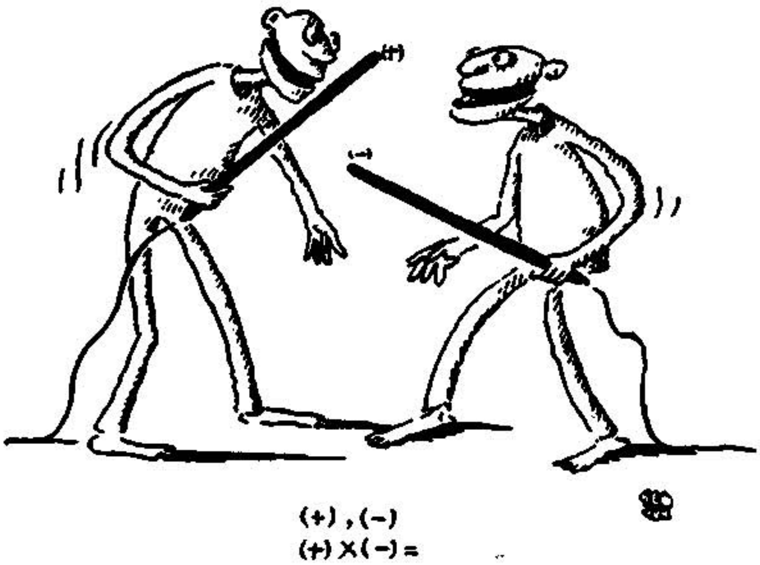
ELEKTRİK MÜHENDİSLİĞİNDE KARŞILAŞILAN BAZI PARADOKSLAR'



Dr. Sencer KOÇ

Paradoks kelimesi eski Yunanca para- (karşı) öneki ve doksas (genel kanı) sözcüğünden oluşmuştur ve sözlük anlamı "genel kanıya aykırı olan düşünceldir. Fakat paradoks kelimesi, genellikle birbirleriyle çelişen iki açıklaması bulunan mantık önermeleri ve fiziksel olaylar için kullanılmaktadır. Bu anlamda paradoks ancak mantık sistemlerinde veya matematikte var olabilir. Çünkü doğa, gözlediğimiz kadarıyla, aynı olaylarda aynı biçimde davranmaktadır. Bu nedenle önce mantık sistemlerinden bir örnek vermek istiyorum:

- Bu önerme yanlıştır.

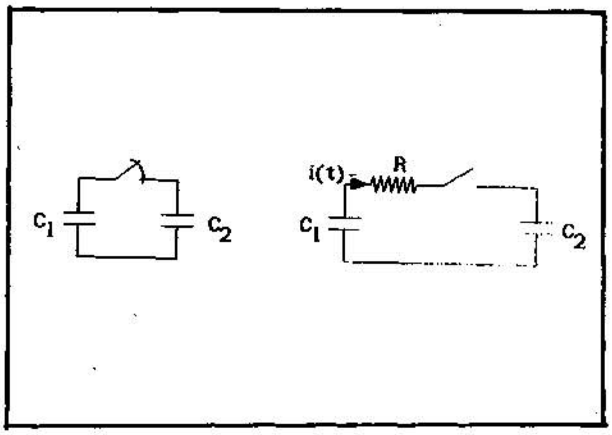
Yukarıdaki önerme doğru olamaz. Çünkü doğruluğu, kendisinin yanlış olduğu anlamına gelir. Fakat aynı önerme yanlış da olamaz, çünkü yanlışlığı, kendisinin doğruluğunu gerektirir. Görüldüğü gibi bu önermenin doğru veya yanlış olduğunu göstermemiz mümkün değildir. 1931 yılında Avusturyalı matematikçi Kurt Gödel, herhangi bir aksiyom kümesinden başlayarak, doğruluğu veya yanlışlığı gösterilemeyecek önermelerin bulunabileceğini gösteren geçerli bir ispat yapmıştır. Bu anlamda, Gödel'in ispatı, hangi aksiyom setinden başlanırsa başlansın, tümden gelim yöntemi kullanılarak oluşturulacak bir matematik sisteminin, mutlaka yukarıdaki türden çelişkiler içereceğini göstermektedir. En eski paradokslardan biri de matematikte Zeno'nun paradoksu olarak bilinenidir:

- A noktasından B noktasına bir doğru üzerinde sabit hızla ilerleyen bir koşucu önce yolun yarısını katetmek zorundadır. Sonra kalan yolun yarısını, sonra gene kalan yolun yarısını katetmelidir. Bir doğru parçası her zaman ikiye bölünebileceğine göre koşucunun önünde katetmek zorunda olduğu yarı daima bulunacaktır. Dolayısıyla koşucu B noktasına hiçbir zaman varamaz.

Bu iddianın yanlışlığı birçoğumuza çok açık gelecektir. Çünkü artık sonsuz elemanlı serilerin yakınsak olabileceğini biliyoruz.

Bu semineri vermeyi düşündüğümde, elektrik mühendisliğinin birçok alanlarında paradokslar toparlayabileceğim! sanıyordum. Fakat burada sunacağım paradokslardan sadece bir tanesi devreler teorisinden, diğerlerinin tümü Elektromanyetik Teorisi ile ilgili.

Kayıplı Kayıpsız Teller! Şekil 1'deki C, ve C_2 sığalarının değerlerinin aynı olduğunu varsayalım ve bu değeri C ile gösterelim. C, sığacı V gerilimine kadar yüklenmiş olsun ve C_2 sığacı yüksüz olsun. Devreyi oluşturan iletkenlerin ve düğmenin kayıpsız olduğunu



*Bu yazı OOTÜ Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümünde Haziran ayı içinde, ODTÜ elektronik ve Bilim Topluluflu taralından hazırlanan bir seminer notlarından düzenlenmiştir.

düşünelim, t - O anında devre kapatılmaktadır. Soru devre kapatıldıktan sonra sığaçların uçları arasındaki gerilimin ne olacağıdır?

Çözüm: Başlangıçta C, sığacı üzerinde Q - CV yükü bulunmaktadır. Sığaç değerleri eşit olduğu için devre kapatıldıktan sonra bu yük iki eşit sığaç üzerinde eşit olarak dağıtılacaktır. Dolayısıyla gerilim

v ı -£r|-i oVacaktır -

Ancak bu çözümde enerji açısından bir gariplik vardır. Sistemin toplam enerjisi başlangıçta

$$E_B = \frac{1}{2}CV^2$$

idi. Son durumdaki toplam enerji ise:

$$E_s = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}C\left(\frac{V}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}C\left(\frac{V}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}CV^2$$

olmaktadır. İletkenleri kayıpsız olarak düşündüğümüze göre aradaki fark nereden kaynaklanmaktadır. Bu problemi başlangıçtaki ve son durumdaki enerjileri eşitleyerek çözersek, toplam yükün korunmadığı ortaya çıkacaktır.

Bu paradoksun çözümünü anlamak için önce iletkenlerde kayıpların varolduğunu varsayalım ve bu kayıplar aşağıdaki gibi bir R direnci ile gösterelim. Devre kapatıldıktan sonraki akımı şu şekilde ifade edebiliriz:

$$i(t) = i(\infty) + (i(0) - i(\infty))e^{-tt}$$

İH-0; I(O)«^; $\tau = RC/2$

'«•)£•*

Dolayısıyla direncin üzerinde harcanan anlık güç $P_R(t)$ - $I^2(t)R$ ile verilecektir. Direncin üzerinde harcanan toplam enerjiyi bulmak için $P_R(t)$ değerini t - 0 anından t - ~ anına kadar toplamamız gereklidir:

$$E_R = \int_{t=0}^{\infty} Pn(t)dt - \int_0^{\infty} \frac{{}^2}{n} e^{-2t/2} dt = \frac{1}{4}CV^2$$

Görüldüğü gibi direncin üzerinde harcanan toplam enerji direnç değerinden bağımsızdır. Şimdi R değerini sıfıra götürürsek, kayıpsız sistemde enerjinin nereye gittiği ortaya çıkacaktır. Ancak gene de kayıpsız varsaydığımız bir devrede kayıpların olmasını anlamak güçtür. Aslında bu problem devre teorisinde hatalı kurulmuş bir problemdir çünkü bir gerilim kaynağının kısa devre edilmesiyle eşdeğerdir. Bu örnek, teorileri kullanırken, başta yapılan kabullerin unutulmaması gerektiğini göstermektedir.

Hangi Referans Sistemi?

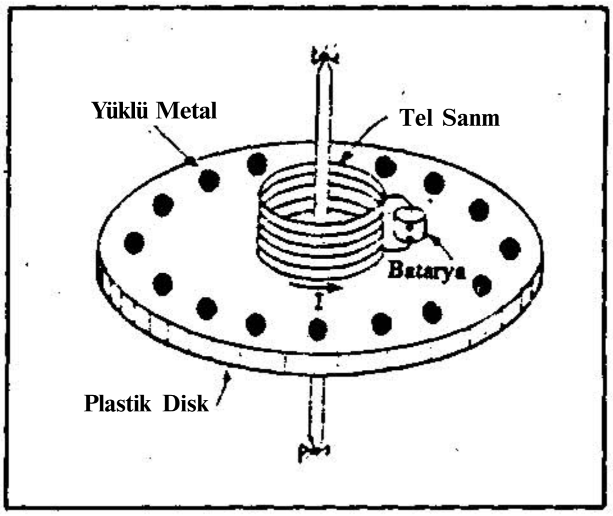
Düzgün birVnanyetik alan içerisinde üzerinde q yükü bulunan bir tanecik düşünelim. Manyetik alan uzayın her noktasında aynı değere sahip olduğu için, uzayın her noktasının simetrik olduğunu, yani tamamen aynı özelliklere sahip olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla bu alan içinde bulunan taneciğin hareketli ya da durağan olduğunu söylememiz olanaksızdır. Bu aynen açık denizin ortasındaki bir gemiden çevreye bakarken durduğunuzu veya hareketli olduğunuzu anlayamamanıza benzer, öte yandan tanecik eğer hareketli ise Lorentz kanununa göre

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

kuvvetini hissedecektir. Eğer q yükü biliniyorsa tanecik hareketli olduğunu anlamakla kalmayıp, kendi hızını da ölçebilecektir. Buradaki problem, teknik deyimlerle, taneciğin hızının hangi referans sistemine göre ölçüleceğidir, örneğin, referans sistemimizi anlık olarak tanecikle birlikte hareket eden bir sistem olarak seçersek (ki bu eylemsiz bir sistemdir), v - O ve $\vec{F}$* - O buluruz. Diğer bütün eylemsiz referans sistemlerinde kuvvet sıfırdan farklıdır. Sorunun doğru cevabı, elbette, hızı $\vec{B}$ alanının ölçüldüğü referans sisteminde ölçmektir. Fakat bu, eğer kuvvet her sistemde aynı olacaksa, $\vec{B}$ 'nin her sistemde farklı olacağı anlamına gelir. Gerçekten de eğer görelilik kuramının Lorentz dönüşümlerini uygularsak birbirlerine göre farklı hızlarla hareket eden eylemsiz referans sistemlerinde sadece manyetik alanın değişmekle kalmayıp, bir de durağan elektrik alanının ortaya çıktığını görürüz. Aslında sadece yukarıdaki problemle başlayıp özel görelilik kuramının sonuçlarına varmak da mümkündür.

Açısal Momentum Korunur mu?

Şekil 2'de görülen deney sistemini düşünelim. Burada ince, dairesel plastik bir disk merkezinden geçen bir eksenle sürtünmesiz iki taşıyıcı arasına yerleştirilmiştir.



Diskin üzerinde, eksenin çevresine sarılmış bir bobin bulunmaktadır ve gene diskin üzerinde bulunan bir pil bobinde sabit bir I akımı yaratmaktadır. Diskin çevresinde birbirinden eşit uzaklıklara yerleştirilmiş, birbirlerindenve bobinden plastik disk ile yalıtılmış metal küreler yerleştirilmiş ve hepsi aynı Q yükü ile yüklenmiştir. Başlangıçta disk hareketsizdir. Şimdi bir şekilde solenoid akımın kesildiğini düşünelim (bu bir vericiyle kontrol edilen elektronik bir düğme aracılığıyla yapılabilir). Bobinden akım geçtiği sürece, sarımların ortasından geçen ve eksene aşağı yukarı paralel durumda olan bir manyetik akı varolmalıdır. Akım kesildiği anda bu akı sıfıra inecek ve dolayısıyla diskin etrafında dairesel bir elektrik alanı indüklenecektir. Diskin çevresinde yerleştirilmiş bulunan metal kürelere, bu elektrik alanı teğet bir kuvvet uygulayacaktır. Bu elektriksel kuvvetlerin hepsi diske aynı yönde teğet olduğu için, diske net bir tork uygulanacak ve disk dönmeye başlayacaktır.

Sistem başlangıçta tümüyle durağan olduğu için açısal momentumu sıfırdır. Akımın kesilmesi ise net bir açısal momentuma sebep olacaktır.

Enerjik Enerji

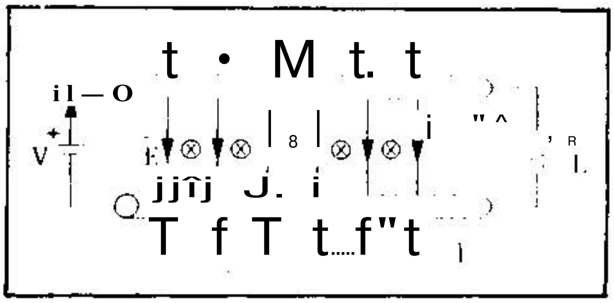
Önceki problemin çözümünü elektrostatik ve manyetostatik alanların uzayda enerji dağılımı yaratmasındadır. Bunun için yukarıdaki örneği basitleştirerek bir nokta yükün bir çubuk mıknatısın yanında hareketsiz durduğunu düşünelim. Bu örnekte her şey tümüyle durağandır, dolayısıyla toplam enerji zamanla değişmemektedir.

Elbette $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanları da durağan olacaktır. Ancak Poynting vektörüne bakarsak, bir enerji akımı olduğunu görürüz, çünkü $\vec{E} \times \vec{B}$ sıfır değildir. Enerji akışını incelersek, enerjinin sadece sistemin çevresinde döndüğünü görürüz. Dolayısıyla herhangi bir birim hacime giren enerji, aynı hacimden çıkan enerjiye eşittir ve enerji yoğunluğu uzayın her noktasında sabittir. Bu durum bir su girdabına benzetilebilir.

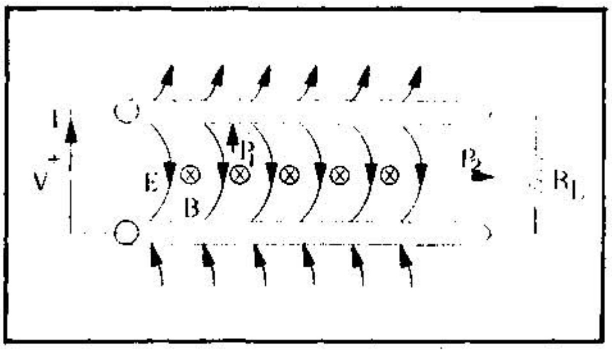
Eğer $E - mc^2$ formülünü hatırlarsak bu dönen enerjinin bir açısal momentum taşıdığını da anlayabiliriz. Önceki problem, esas olarak bu örneğin aynısıdır; tek değişiklik önceki örnekte manyetik alan yaratmak için bir bobinin kullanılmasıdır. Dolayısıyla akım kesilmeden önce elektrostatik enerjilerin dönmesinden dolayı net bir açısal momentum vardır.

Enerji İletim Hatları Enerji İletmezler

Poynting teoremi birçok durumda beklenmedik sonuçlar verir. Bunlardan biri de iletim hatlarında ortaya çıkmaktadır. Şekil 3'de görüldüğü gibi yük direnci ile gerilim kaynağını birleştiren tellerin kayıpsız olduğunu varsayalım. Bu durumda tellerin içersindeki elektrik alanı sıfır olacaktır. Dolayısıyla Poynting vektörü $\vec{E} \times \vec{B}$'de sıfırdır, bu da tellerin içersinde bir enerji akışı olmadığını gösterir. Ancak tellerin çevresinde elektrik ve manyetik alanlar sıfır değildir ve kaynaktan yüke doğru net bir enerji gösterirler (P : E x B vektörü kaynaktan yüke doğrudur).



Eğer iletim hattının özdirenci sıfırdan farklı ise elektrik alanının tellere teğet bir bileşeni olacaktır. Bu durum ise Şekil 'de gösterilmiştir. Dolayısıyla tellerin yakınından Poynting vektörünün tellere dik bir bileşeni oluşur (P,).

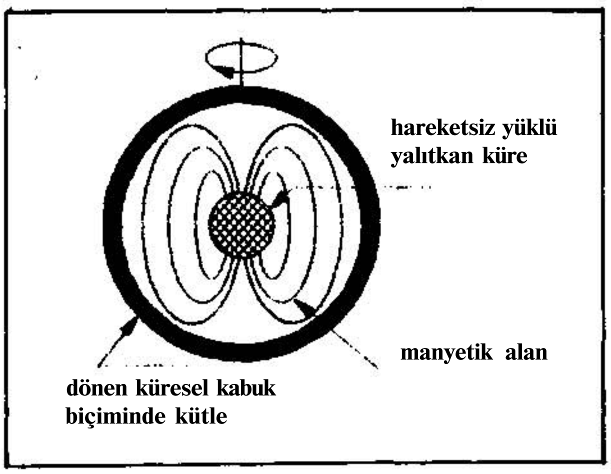


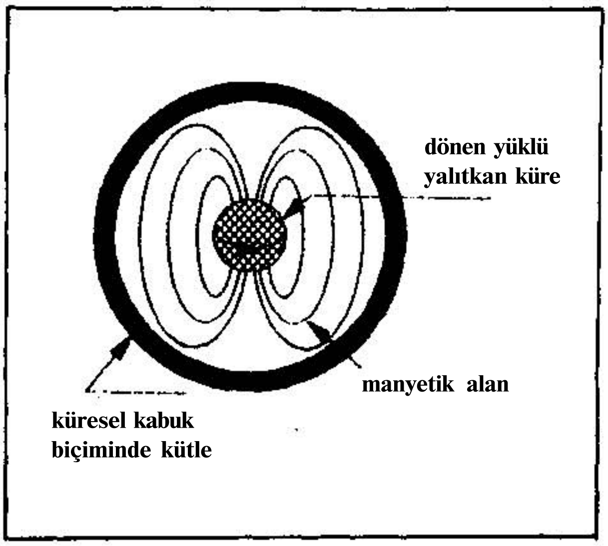
Bu bileşenin tellerde harcanan güçle orantılı olduğu kolayca gösterilebilir.

Bu örnekte iletim hatlarının içinden değil çevresinden enerji aktarımının gerçekleştiği gösterilmiştir. Ancak hatlar, elektrik ve manyetik alanların, kaynaktan yüke doğru bir enerji akışını sağlayacak biçimde oluşturulması için gereklidir.

Hareketsiz Yükler Manyetik Alan Yaratabilir

Görelilik kavramını ilk ortaya atan kişilerden biri, bir fizikçi-filozof olan Machtır (1836-1916). Mach, fiziksel olaylarda önemli olan tek şeyin relatif hareket olduğuna inanmıştır. İddiaların birçoğu görelilik kuramı ile kanıtlanmış olmasına karşın hâlâ ispatlanamamış iddiaları da vardır.





Kütlesi çok büyük olan küresel kabuk biçiminde bir cisim düşünelim. Bu cismin içerisindeki boşlukta dönmekte olan yüklü yalıtkan bir küre bulunmaktadır. Yükler hareketli olduğu için dönen bir akım yaratacak, dolayısıyla bir manyetik alan oluşturacaklardır, (b) şekli ise Mach'a göre (a)'ya özdeş olması gereken görüşü yansıtmaktadır. Burada yüklü kürenin hareketsiz, çevredeki cismin dönmekte olduğu düşünülmektedir. Her iki durumda relatif hareket aynı olduğu için (b) durumunda (a)'dakine eşit manyetik alanların oluşması gereklidir. Bu örnekte kabuk biçimindeki kütleyi yalıtkan cismin çevresindeki evrenin basit bir modeli olarak yorumlayabiliriz.

Bu olay, J. Ehlers ve W. Rindler tarafından genel görelilik kuramı temelinde incelenmiştir [Phys. Rev. D, 4, 3543, (1971)]. Gerçekten bir manyetik alan oluşacağı görülmüştür, fakat sayısal olarak Mach'ın beklentisine uymamaktadır.

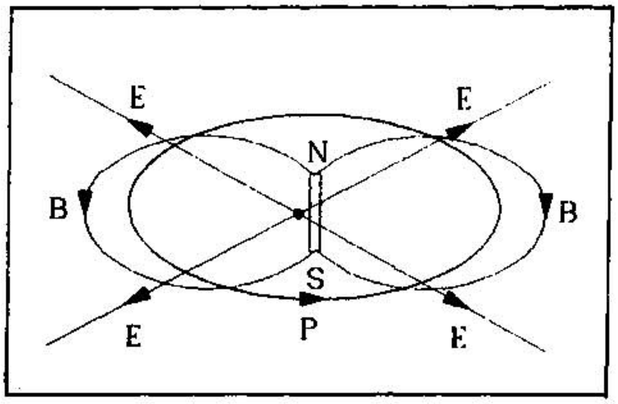
Gündüzler Nadan Gecelerden Daha Aydınlıktır?

Elektrik mühendisliğinin kapsamına girmeyen konularda da ilk bakışta çok garip gelen sorularla ve sonuçlarla karşılaşılabilir. Görelilik kuramı bu bakımdan çok zengindir. Bu kuramla incelenen olaylar günlük yaşantımızda çok olduğu için, sonuçlar genellikle çok şaşırtıcı olmaktadır.

Bu bölümün başlığındaki soru pek çok kişinin aklına bile gelmez. Ancak evrenimizde sonsuz sayıda yıldız bulunduğunu varsayarsak, geceleri gökyüzünü kaplayan bunca yıldızın neden bu kadar az ışık verdiğini düşünmek gerekir. Hesaplayalım! Bunun için bazı basitleştirilmiş modellere ihtiyacımız var.

1- Evrenimiz sonsuzdur ve yıldızlar evrende homojen olarak dağılmıştır. Bu durumda evrendeki birim hacimde sabit bir kaynak şiddeti kabul edebiliriz. Bu değere I diyelim.

2- Işık, kaynağından her yöne eşit olarak yayılır. Dolayısıyla kaynaktan r kadar uzaklıkta ışık yoğunluğu $I/4\pi r^2$ formülüyle verilir.



Yukarıdaki varsayımlar uzaydaki herhangi bir birim hacimden dünyaya ulaşan ışık yoğunluğu

$$dI_d = \frac{I\,dV}{4\pi r^2}$$

formülüyle verilir. Burada r, dV hacminin dünyaya olan uzaklığı, I·dV ise bu hacimdeki toplam kaynak şiddetidir.

Dünyaya ulaşan toplam ışık yoğunluğunu bulmak için bu ifadeyi entegre etmemiz gerekir. Dünya üzerindeki bir noktaya sadece onun bulunduğu yarım küreden ışık ulaşabileceğini düşünürsek, küresel koordinatlarda olduğunu buluruz.

$$I_d = \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\infty} \frac{I\,dV}{4\pi r^2} =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{I\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{4\pi r^2} = \infty\ ???$$

Güneşin tek başına gece ve gündüz arasındaki aydınlık farkını yaratması mümkün değildir.

Bu, sonuç varsayımlarımızdan birinin yanlış olduğunu gösteriyor, ikinci varsayım çok değişik yöntemlerle kanıtlandığına göre birinci varsayım yanlış olmalıdır, yani: Evren sonludur.

Not: Yukarıdaki çıkarımda ışık kaynaklarının birbirlerini engellemediği varsayılmıştır.