gürültüsüz eniyi zaman denetim probleminde anahtarlama eğrisinin bulunması

H. öner Yurtseven

ÖZET

Yazıda doğrusal, zamanla değişmeyen sistemler için bilinen eniyi-zaman denetim koşulları basitleştirilmiş olarak verilmekte ve ikinci derece bir sistemin anahtarlama eğrisi çözümsel olarak elde edilmektedir. Bulunan eğri, sisteme gürültünün karıştığı durtımlarda Monte Karlo yöntemi uygulanırken başlangıç eğrisi olarak kullanılabilmekte ve eniyi-zaman çözümünün bulunmasını kolaylaştırmaktadır.

SUMMRRY

Well known results of deterministle time optimal control for a linear time-invariant system are given in a simplified manner and the switching curve for a second order system is obtained analytically. The curve can be used as an initial approximation in Monte Carlo method for stoehastic time optimal control and serve as a suboptimal solution.

UDK: 621-52

GÎRÎŞ

Eniyi denetimin *(optimal control)* çok bilinen sorunlarından biri de bir sistemin başlangıç durumundan son durumuna en kısa zamanda götürülmek istendiği eniyi zaman denetim *(time-optimal control)* sorunudur. Fiziksel nedenlerden dolayı denetim girişlerinin genlikleri sınırlıdır ve klasik değiş imsel matematik kullanılamaz. Gerçekte ilk kez bu tür problemde "bang-bang" tipi yada bir sınırdan ötekine değişen denetim kullanılmıştır.

Soruna Pontryagin'in [1] maksimum ilkesi *(maximum principle)* yada Bellman'ın [2,3] devinik programlaması *(dynamic programming)* ile yaklaşılabilir. Ancak bunlardan birincisinde denetim yalnızca zaman işlevi, başka bir deyişle "açık-döngü" tipi denetim, ikincisinde ise durum değişkenlerinin işlevi yada "kapalı-döngü" tipi denetimdir. Devinik programlama yöntemi maksimum ilkesi kadar genel olmasa bile gürültülü eniyi-zaman denetim problemlerinde kullanılabilmektedir. Buna karşılık maksimum ilkesinin bu tür problemlere uygulanması zordur.

Gürültüsüz bir sistem için, son durum yalnızca bir nokta ise devinik programlama kullanılamaz, fakat bu çalışmada son durum nokta değil bir çemberdir ve her iki yöntem de uygulanabilir. İleride gösterileceği gibi çember yerine elips alınırsa çözüm biraz daha karışık olacaktır.

H.Oner Yurtseven, Y. Prof .Dr., ODTÜ

PROBLEM TANIMI

Doğrusal, zamanla değişmeyen sistem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad (1)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Burada $x(t)$ nxl boyutlu durum vektörü, $u(t)$ mxl boyutlu uyarı yada giriş vektörü, A ve B de nxn ve nxm boyutlarında değişmez matrislerdir. Giriş yada uyarı, $u(t)$, sınırlı bir U kümesi içinde parça-parça sürekli *(piece-wise continuous)* olsun.

Artık problem şöyle tanımlanabilir: Başlangıç koşulu $x(t_0) = X_0$ olan ve denetlenebilir (1) sistemi için öyle bir parça-parça sürekli denetim $u(t) \in U$ bulunmalı ki sistemi başlangıç durumu x_0 dan uç bölgesi S ye enaz zamanda getirsin; bir başka deyişle,

$$I = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt = t_f - t_0$$

en küçük değerde kalsın. Uyarı yada denetimdeki sınırlama fiziksel nedenlere dayanmaktadır, üstelik problemin tanımı sınırsız denetimler için daha zordur. Alışılageldiği üzere denetim vektörünün her öğesi için sınırlı olma yani,

$$|u_i| \leq a_i$$

koşulu konursa, U kümesinin bir paralel yüzlü *(parallelopiped)* olduğu görülür.

Şekil 1. S uç bölgesi için durum yörüngesi.

Çözüm :

Problemin çözümü için devinik programlama kullanılarak Hamilton-Jacobi kısmi türevsel denklemi elde edilecektir.

Şekil l'de gösterildiği gibi, T(x), sistemin t_0 anında $x(t_0)$ durumundan tf anında S bölgesinde x(tf) durumuna ulaştığı enaz zaman olsun. Burada T(x) denetime bağlı değildir.

At saniye sonra durum vektörü x+Ax ve uç bölgesi S ye ulaşmak için gerekli enaz zaman T(x+Ax) dir. Artık T(x+Ax) uyarı yada denetime bağlıdır çünkü Ax denetimin bir işlevidir. Bellman'ın ilkesine göre eğer T(x), x durumundan S bölgesine ulaşmak için geçen enaz (minimum) zaman ise, U(t) denetimi x + Ax durumundan S ye ulaşmayı enaz yapacak şekilde seçilmelidir:

$$T(x) = At + \min_{ueU} T(x + Ax) \qquad (2)$$

T(x) işlevinin birinci kısmi türevleri varsa,

$$T(x + Ax) = T(x) + \sum_{i=1}^{n} 8T(x)/\partial x_i \; \Delta x_i + O(Ax) \qquad (3)$$

olarak yazılabilir. Burada 0(Ax£), Axi'in

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} O(A_{xi})/A_{xi} = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

koşulunu sağlayan yüksek dereceli terimlerini kapsamaktadır.

x£(t + At) için Taylor açınımı kullanılırsa:

$$x_i(t+\Delta t) = x_£(t) + \dot{x}_i(t)\, At + O(At),$$

$$i = 1,2....n$$

yada

$$\Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + 0(At), \quad i = 1,2,...,n$$

elde edilir.

(1) denkleminde

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}u_k \qquad i = 1,2,...,n$$

yazılabildiğine göre son iki denklemi (3) denklemine ve onu da (2) denklemine koyup basitleştirme yapılırsa

$$0 = At + \min_{ueU} \sum_{i=1}^{n} 3T(x)/3x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}u_k \Big) \Delta t + 0(At)$$

bulunur. Denklemin her iki yanı At ile bölünüp At sıfıra yaklaştırılırsa, (4) ile verilen Hamilton-Jacobi kısmi türevsel denklemi bulunur:

Hamilton-Jacobi denklemi

$$0 = 1 + \min_{ueU} \sum_{i=1}^{n} 3T(x)/3x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}u_k \Big) \qquad (4)$$

ve

$$3T/3x = [\partial T/\partial x_1 \; ... \; 3T/3x_n]',$$

$$<x,y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

tanımları yardımıyla

$$0 = 1 + \min_{ueU} \langle OT(x)/3x, \; Ax+Bu \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Eğer çözüm olabilecek denetimlerin kümesi küp olursa, U = { u | |ujj < 1 } , Hamilton-Jacobi denkleminin çözümü

$$u_T = -\mathrm{sgn} \sum_{i=1}^{n} 3T/3x_i \; b_{ik} \qquad k = 1,2....m$$

yada vektör denklem olarak

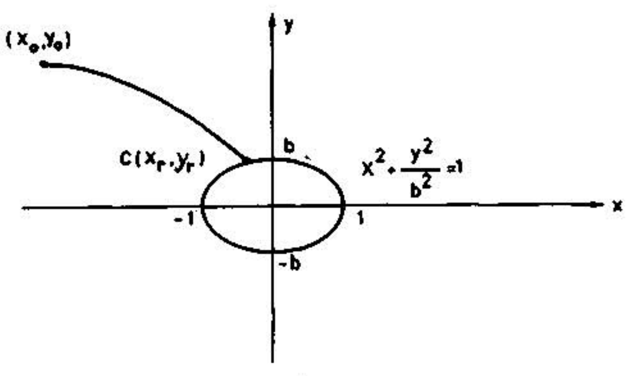
$$u = -\mathrm{sgn}\; B'3T/3x \qquad (5)$$

şeklinde çıkar. Burada sgn ile tanımlanan işlev, işaret yada yön işlevidir ve

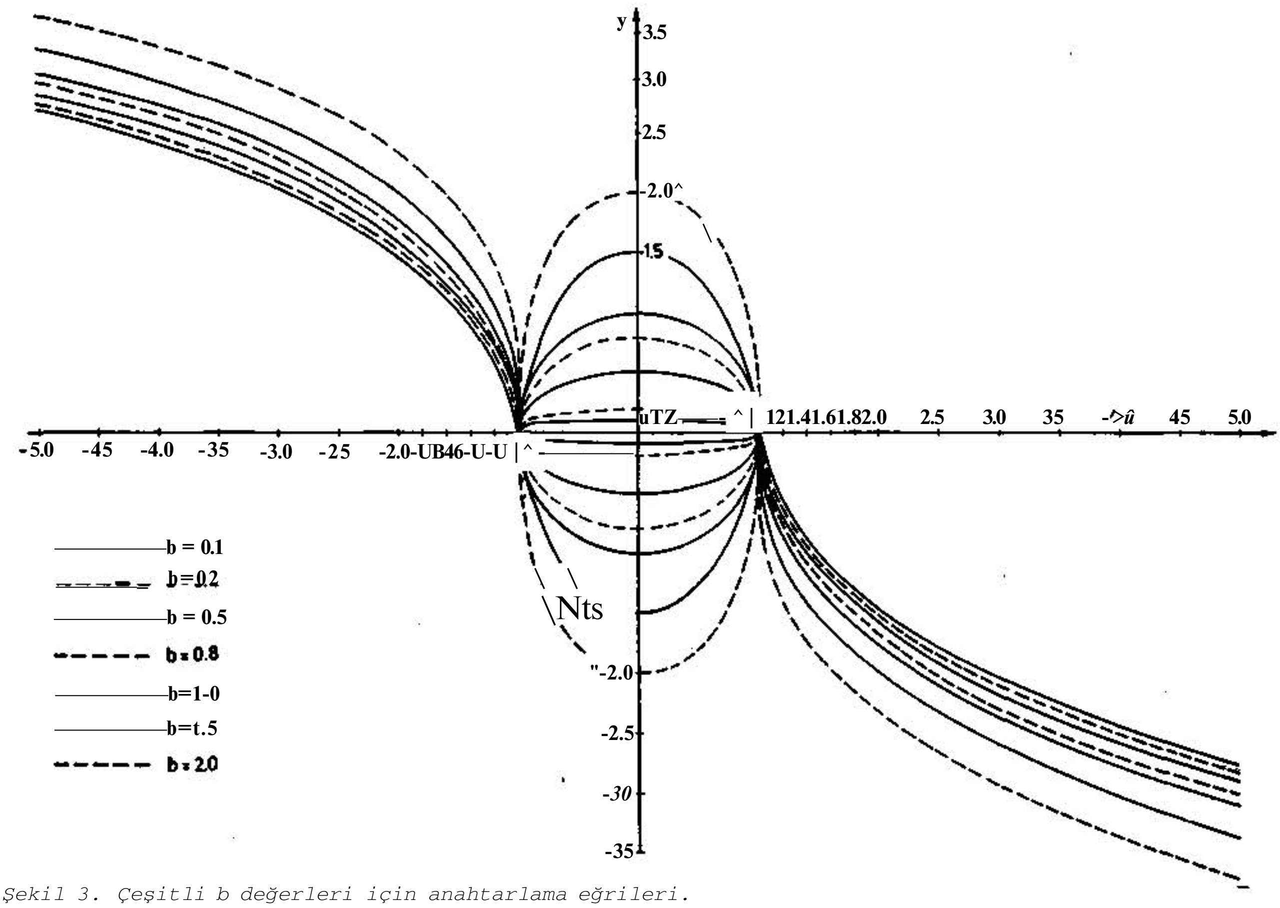
$$\mathrm{sgn}\; x = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ile verilir. En iyi denetim bu durumda bir sınırdan ötekine atlayan "bang-bang" adı verilebilen denetim olmaktadır.

u(t) denetimi bir boyutlu (skalar) ise (4) denkleminin çözümü için u(t), ya +1 yada -1 olarak



Şekil 2. Eliptik uç bölgesi için durum yörüngesi.



Şekil 3. Çeşitli b değerleri için anahtarlama eğrileri.

alınır ve sınır koşulları olarak xeS için T(x)= 0 eşitlikleri kullanılır. Bulunan çözümler durum uzayında ancak belirli bölgeler için geçerli olur ve bu bölgeleri ayıran anahtarlama eğrisi (5) denkleminde

$$B'3T(x)/8x = 0$$

alınarak elde edilir. T(x) anahtarlama eğrisi üzerinde sürekli olduğu için bulunan bu çözüm, durum uzayında daha geniş bölgeler için çözüm elde etmede kullanılır. Bundan sonraki bölümde verilen kolay bir örnek şimdiyedek anlatılanları daha iyi aydınlatacaktır.

örnek :

Durum denklemleri

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (6)$$

olarak yazılabilen ikinci dereceden bir sistemi ele alalım. Şekil 2'de gösterildiği gibi eliptik uç bölgesi için anahtarlama eğrisi elde edilecektir.

Verilen sistem için (4) denklemi

$$0 = 1 + \min_{u \in U} [8T/9x\ y + 8T/3y\ u]$$

durumuna gelir. Parantez içindeki terimin minimum olması için

$$u = -\mathrm{sgn}\ 3T/3y \qquad (7)$$

olması gerekir. (5) denkleminde x,y,u yerine sırasıyla -x, -y, -u konduğunda eşitlik korunduğu için çözüm bakışımlıdır (simetrik), dolayısıyla yalnızca 3T/3y> 0 durumunu incelemek yeterlidir. Bu durumda, (7) denkleminden u = -1 bulunur ve (4) denklemi

$$0- 1 + 3 T/3 x\ y - 3T/3y \qquad (8)$$

olur. (8) denkleminin çözümü ise [4]

$$dx/y = dy/-1 = dT/-1$$

olarak bulunur. Birinci eşitlikten

$$x^2 + y^2/2 = c_1 , \qquad (9)$$

ve ikinci eşitlikten

$$T(x,y) = y - c_2 \qquad (10)$$

elde edilir. (9) denklemi durum değişkenleri x ve y nin izleyecekleri yörüngeyi, (10) denklemi de minimum zamanı verirler, c_1 ve c_2 değişmezleri sınır koşulları kullanılarak bulunurlar. Uç bölgesi elips olduğundan

$$(x,y) \in S = \{ x,y \mid x^2 + y^2/b^2 < 1\}$$

için T(x,y) =0 dır. Uç bölgesinde $C(x_r,y_r)$ noktasında hem (9) denklemi, hem de uç bölgesi denklemi sağlanacağından,

$$c_1 = x_r^2 + \frac{1}{2} y_r^2$$

ve

$$\frac{2}{b^2} = 1$$

olacaktır. Bu iki denklemden, y_r

$$y_r = \left[-\frac{2}{g} \{1/b^2-(2x+y^2-b^2)\}^* + 2x + y^2 - 2/b^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur. (10) denklemine de sınır koşulu uygulanırsa:

$$T(x_r,y_r) = y_r - c_2 = 0$$

ve

$$c_2 = y_r$$

elde edilir.

$$A = |1/b^2 - (2x+y^2-b^2)|^{\frac{1}{2}} \text{ ve } B = 2x+y^2-2/b^2$$

olarak tanımlanırsa

$$B = b^2 - 1/b^2 - A^2$$

olur ve (10) denklemi

$$T(x,y) = y - \left[(2/b)A+b^2- 1/b^2-A^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

denklemine dönüşür. Anahtarlama eğrisi

$$\partial T(x,y)/\partial y = 0$$

koşulu ile bulunacağı için (11) denkleminin kısmi türevi alınıp, sıfıra eşitlendiğinde

$$-(1-bA)\, y/A = b\left[(2/b)A + b^2 - 1/b^2 - A^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur. Her iki yanın karesi alınıp basitleştirilir ve A nın tanımından y çekilerek yukarıda yerine konursa

$$A = \left[<b^{1>}-2b^2x+1) + b^2(b''-2b^2x+1)^{\frac{1}{2}}\right] / b(1-2b^2x)$$

bulunur. Gene A nın tanımıyla karşılaştırıldığında

$$y = \Big[-8b^*x^3 + (4b'' + 8b^2)x^2 + (2b''-2)x-2b^6 - 2b^2 - 2(b'' - 2b^2x + 1)(b^{1*} - 2b^2x + 1)^*\Big]^{\frac{1}{2}} /(1-2b^2x) \quad (12)$$

elde edilir. Daha önce de belirtildiği gibi eğri bakışımlıdır ve Şekil 3'de b nin çeşitli değerleri için çizilmiştir. Burada vurgulanması gereken bir nokta yukarıdaki örnekte yörüngelerin uç bölgesini kestiği durumlar için minimum zaman T(x,y) bulunduğudur. Çözümü daha genelleştirmek ve yörüngelerin anahtarlama eğrisini kestiği durumları da incelemek için, T(x,y)'nin anahtarlama eğrisi üzerindeki değeri bilinmeli ve bu problemi yeniden çözmek için sınır koşulu olarak kullanılmalıdır. Yukarıda yapılan örnek için buna gerek yoktur, çünkü anahtarlama eğrileri tam olarak bulunmuştur.

Büyük x değerleri için (12) denkleminde payın sadece ilk iki terimi alınabilir ve

$$y = \left[-8b^6x^3 + (4b'' + 8b^2)x^2\right]^*/(1 - 2b^2x)$$

olarak yazılabilir. Pay paydaya bölünürse

$$y = \left[-2x + b^2 + (1+1/b'')/x+(3/4b^2 + 1/2b^6)/x^2 + \ldots\right]^{\frac{1}{2}}$$

olur ve gene büyük x değerleri için, ilk iki terimin yeteceği varsayılırsa

$$y \simeq \left[-2x+b^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

yada

$$x + y^2/2 = b^2/2 \quad (13)$$

çıkar ki bu da anahtarlama eğrisinin yaklaşık gösterimidir. (13) denklemi, (12) den daha önemlidir, çünkü daha basittir ve alteniyi *(suboptimal)* anahtarlama eğrisi olarak kullanılır.

Eğer b= 1 alınırsa, uç bölgesi çember olur; yörünge denklemi

$$y = \left[-8x^3 + 12x^2 - 4 - 2(1-2x+1)(1-2x+1)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} / (1-2x)$$

ve minimum zaman da

$$T(x,y) = y - \left[2\{2(1-x-y^2/2\}^{\frac{1}{2}} - 2(1-x-y^2/2)\right]$$

şekline dönüşür ki kaynak [5] ile aynı sonuçlara varılır. T(x,y) nin bulunmasındaki ayrıntılara burada girilmemiştir.

SONUÇ

Gürültüsüz eniyi zaman denetim probleminin tam çözümü elde edilmiştir. Anahtarlama eğrisinin basitleştirilmiş bir yaklaşımı sisteme gürültü eklendiğindeki çözümü bulmak için başlangıç eğrisi olarak kullanılabilir. Özellikle Monte Karlo yönteminde, çözüm aramayı kısaltmaya yardım eder.

KAYNAKLAR

[1] *Pontryagin, Bol'tyanskii, Gamkrelidze, Mishchenko,* "The Mathematical Theory of Optimal Processes", McMillan Co., New York, 1964.

[2] *Bellman, R.E.,* "Dynamic Programming", Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1957.

[3] *Dreyfus, S.E.,* "Dynamic Programming and the Calculus of Variations", Academic Press, New York, 1965.

[4] *Kells, L.M.,* "Elementary Differential Equations", McGraw Hill, New York, 1960.

[5] *Robinson, P.N.,* "Stochastic Time-Optimal Control" Ph.D.Dissertation, Department of Elect. Engg. Polytechnic Institute of Brooklyn, N.Y. Haziran, 1965.