

ÖLÜ ZAMANLI SİSTEMLERİN PADÉ AÇILIMLARI KULLANARAK KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİ (KDY) İLE KONTROLÜ

Mert Yardımcı¹

Ömür Öcal²

Atilla Bir³

^{1,3}Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Bölümü
Elektrik-Elektronik Fakültesi
İstanbul Teknik Üniversitesi, 80626, Maslak, İstanbul
²Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Mühendislik Fakültesi
Kadir Has Üniversitesi, Cibali-İstanbul

¹e-posta: yardimci@yahoo.com

²e-posta: ocal@khas.edu.tr

³e-posta: abir@elk.itu.edu.tr

Anahtar Kelimeler: Katsayı Diyagram Yöntemi (KDY), Ölü Zamanlı sistemler, Padé Açılımları

ABSTRACT

Coefficient diagram method (CDM) is a controller design method for linear time invariant systems and also can be used for systems with dead-time. To apply conventional design methods one needs to approximate dead-time transfer function by a rational function. In this paper dead-time is approximated with by a high order Padé approximation and the controller is designed by conventional CDM.

1. GİRİŞ

Endüstri uygulamaların çoğunda ölü zaman içeren elemanlar bulunur. Katsayı Diyagram Yöntemi (KDY) kontrol sistemlerinde kontrolör tasarlamak için geliştirilmiş analitik bir yöntemdir ve ölü zamanlı sistemlere de uygulanabilir. Katsayı diyagram yönteminin oluşması uzun yıllar almasına rağmen ilk kez Shunji Manabe tarafından etkin bir şekilde kullanılmıştır [4,5]. Manabe'nin tasarlamış olduğu kontrolörle aşısız bir sistem yanıtı elde edilir. Ayrıca sistemin istenilen zamanda yerleşimi, dayanıklı olması ve bozucu etkisinin hızlıca giderilir [1,7].

Ölü zamanlı sistemlerde mevcut kontrol tasarım yöntemlerinin ortak noktası, ölü zamanın rasyonel

polinomlar biçimde yazılması ve biline gelen tasarım yöntemlerinin uygulanmasıdır. Ölü zamanın rasyonel polinom biçiminde yazılmasının en yaygın yöntemi ise Padé yaklaşımıdır.

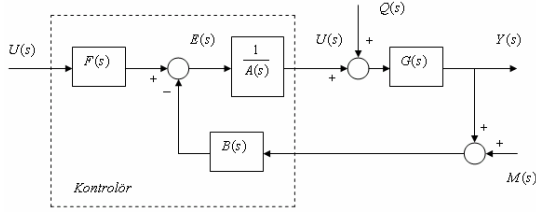
Bu çalışmada ölü zamanın farklı mertebelerde Padé açılımı yapılarak katsayı diyagram yöntemi üzerindeki etkileri gösterilecektir.

2. KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİ (KDY)

Birçok uygulamalarında kontrol edilen sistemlerin kararlı, aşısız, dayanıklı, bozuculardan etkilenmeyen ve öngörülen bir zamanda sistemin yerleşmesi istenir. Shunji Manabe tarafından geliştirilen katsayı diyagram yöntemi sayesinde analitik olarak tasarlanan sistemler bu özelliklerin hepsini taşır. Ayrıca tasarım yöntemi kolay uygulanabilmesi yöntemin kullanılabilirliğini artırır.

2.1 KDY KONTROL SİSTEM YAPISI

Tek giriş tek-çıkışlı bir sistem için katsayı diyagram yöntemi standart blok diyagramı Şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1 - KDY kontrol sistemine ilişkin temel blok diyagramı

Burada $r(t)$ kontrol sisteminin referans girişini, $y(t)$ çıkışını, $u(t)$ kontrol işaretini, $q(t)$ sisteme etkiyen bozucu işaretini, $e(t)$ hata işaretini ve son olarak $m(t)$ ise geri besleme bozucusunu ifade eder. Şekil 1 den görüleceği gibi katsayı diyagram yöntemiyle oluşturulan kontrolörün 3 temel bloğu vardır. $A(s)$ kontrolör transfer fonksiyonunun paydasını, $F(s)$ referans pay ve $B(s)$ ise geri besleme pay polinomunu ifade etmektedir. $G(s)$ kontrol edilmesi istenen sistem transfer fonksiyonudur ve

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1)$$

şeklinde ifade edilir. $N(s)$ sistemin transfer fonksiyonunun pay polinomu, $D(s)$ ise payda polinomudur. Şekil 1' den yola çıkarak kapalı çevrim karakteristik denklemi $P(s)$, $Y(s)$ ve $U(s)$ hesaplanırsa

$$P(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

ayrıca,

$$Y(s) = \frac{A(s)N(s)}{P(s)} Q(s) + \frac{F(s)N(s)}{P(s)} R(s) - \frac{B(s)N(s)}{P(s)} M(s)$$

$$U(s) = \frac{F(s)D(s)}{P(s)} R(s) - \frac{B(s)N(s)}{P(s)} Q(s) - \frac{B(s)D(s)}{P(s)} M(s)$$

biçiminde elde edilir.

2.2 HEDEFLLENEN KARAKTERİSTİK POLİNOM VE TASARIM PARAMETRELERİ

Katsayı diyagram yöntemine başlamadan önce sistem dinamiğini ve yerleşme süresini etkileyen tasarım parametrelerin belirlenmesi gerekmektedir. Bu parametreler τ eşdeğer zaman sabiti, γ_i kararlılık indeksi ve γ_i^* kararlılık sınır indeksidir ve

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1}a_{i-1}} \quad i = 1 - (n-1) \quad \gamma_0 = \gamma_n = \infty \quad (2a)$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (2b)$$

$$\gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i-1}} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \quad (2c)$$

biçiminde tanımlanır.

Katsayı diyagram yönteminde hedeflenen karakteristik polinomu tasarım parametreleri tarafından tanımlanır. Böylelikle sistemin nasıl bir dinamik göstereceği önceden belirlenmiş olur. Bu durumda $P(s)$ karakteristik polinomu tasarım parametreler cinsinden

$$P(s) = a_0 \left[\sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}^j} \right) (\tau s)^i + \tau s + 1 \right] \quad (3)$$

biçimindedir.

2.3 KATSAYI DİYAGRAMI (KD)

Katsayı Diyagramı (KD), Bode benzeri bir grafikdir. Fakat katsayı diyagramından sistemin kararlılığı, yerleşme süresi ve dayanıklılığı hakkında bilgi alındığından daha detaylı bir grafikdir. Diyagramın sol ekseninde $P(s)$ karakteristik polinom, $A(s)$ ve $B(s)$ kontrolör polinom katsayıları ve sağ ekseninde de sistem parametrelerinin bir düzlem üzerinde gösterilmesiyle oluşur [4].

2.4 TASARIM PARAMETRELERİ

Kararlılık indeksi ve kararlılık

Kontrolörlü bir sistemin, kapalı çevrimli karakteristik polinomu Hurwitz kararlılığına sahip olmalıdır [3,4,5].

KDY Routh-Hurwitz kriterine ek olarak Lipatov-Sokolov kriterini de bünyesine dahil etmiştir [5].

Lipatov-Sokolov kriterine göre kararlılık ve kararsızlık için gerekli koşullar aşağıda gösterilmiştir [1,7].

1. Kararsızlık için zorunluluk koşulları:

Koşul a: Performans parametreleri cinsinden ifade edilirse;

$$\gamma_{i-1}\gamma_i \leq 1 \quad \exists i \text{ için } i = 2, 3 \dots n-1 \quad (4a)$$

olarak tanımlanır. Bu koşul, 3. mertebeden kısmi polinomlar cinsinden

$$a_{i-1}a_i \leq a_{i-2}a_{i+1} \quad \exists i \text{ için } i = 2, 3 \dots n-1 \quad (4b)$$

biçiminde de ifade edilebilir.

2. Kararlılık için zorunluluk koşulları:

Koşul a: Kararlılık sınır koşulu diye ifade edilir. Performans parametreleri cinsinden

$$\gamma_i \gamma_{i-1} > 2.1505 \quad \forall i \text{ için, } i = 2, 3 \dots n-1 \quad (5a)$$

şeklinde tanımların ve 3. mertebeden kısmi polinomlar cinsinden

$$a_i a_{i-1} > 2.1505 a_{i+1} a_{i-2} \quad \forall i \text{ için, } i = 2, 3 \dots n-1 \quad (5b)$$

elde edilir.

Koşul b: Performans parametreleri cinsinden

$$\gamma_i > 1.1236 \gamma_i^* \quad \forall i \text{ için, } i = 2, 3 \dots n-2 \quad (6a)$$

şeklinde ifade edilir. 4. mertebeden kısmi polinomlar cinsinden ise

$$a_i > 1.1236 \left(a_{i+2} \frac{a_{i-1}}{a_{i+1}} + a_{i-2} \frac{a_{i+1}}{a_{i-1}} \right) \quad \forall i \text{ için, } i = 2, 3 \dots n-1 \quad (6b)$$

İstenen karakteristik polinomu elde etmek için, kararlılık koşullarından ilki sınır koşulu olarak değerlendirilebilir. Bu değerlerin nasıl elde edildiği ve Lipatov-Sokolov kriteri hakkında daha geniş bilgi [1,3,7,8]' de mevcuttur.

Standart Manabe Biçimi

Shunji Manabe tarafından geliştirilen kararlılık indeksleri ile hem sistemin aşırı hızlı bir cevap elde edilir hem de diğer standart kararlılık indeks biçimlerinden daha kolay akılda kalabilmektedir. KDY yöntemi için önerilen standart biçim

$$\gamma_1 = 2.5, \quad \gamma_{n-1} \sim \gamma_2 = 2 \quad (7)$$

biçimindedir.

Tasarım Prosedürü

Tasarıma ilk önce parametrelerin belirlenmesiyle başlanır. Kararlılık indekslerinin standart manabe biçiminde seçilmesinden sonra T_s yerleşme zaman için eşdeğer zaman sabitinin $\tau = T_s / (2.5 - 3)$ biçiminde seçilmektedir.

Burada iki farklı yerden elde hedeflenen karakteristik polinom ve kapalı cevrimden elde edilen karakteristik denklemin birbirine eşitlenerek diaphontine eşitliği oluşturulur.

$$P(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (8)$$
$$= a_0 \left[\sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}} \right) (\tau s)^i \right] + \tau s + 1$$

buradan da bu eşitlik matris haline getirilirse

$$A(s) = \sum_{i=0}^p l_i s^i \quad \text{ve} \quad B(s) = \sum_{i=0}^q k_i s^i$$

olmak üzere

$$[C]_{rxr} \begin{bmatrix} l_i \\ k_i \end{bmatrix}_{rx1} = [a_i]_{rx1} \quad (9)$$

biçiminde Silvester biçimine dönüştürülür.

F referans payı ise

$$F = \left(\frac{P(s)}{N(s)} \right) \Bigg|_{s=0} \quad (10)$$

denklemden hesaplanabilir.

γ_i kararlılık indeks standart Manabe biçimi kullanılabilir fakat elde edilen sonuçlar istenildiği düzeyde değilse bu indeks değerleriyle oynama yapılarak sistem dinamiğiyle oynanabilir [1].

3. ÖLÜ ZAMAN YAKLAŞIMLARI

Bir sistemde ölü zaman bulunması halinde transfer fonksiyonunda $e^{-\tau s}$ şeklinde bir üstel fonksiyon görülür. Bu durumda sisteme herhangi bir kararlılık analizi Routh kriterleri, kök-yer metodu.. vs yapabilmesi için transfer fonksiyonundaki üstel fonksiyon rasyonel polinomlar biçiminde ifade edilir. Bu yaklaşımlar arasında en çok kullanılan ve bilinen Padé yaklaşımıdır.

3.1 PADÉ YAKLAŞIMI

Herhangi bir fonksiyonun ($R_{n,m}$) Padé metodu kullanarak rasyonel bir fonksiyon biçiminde yazabilmek için önce $s=0$ da fonksiyonun ve türevinin sürekli olması gerekmektedir

$$R_{n,m}(s) = \frac{P_n(s)}{Q_m(s)} \quad (11)$$

$$P_n(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_n s^n \quad (12)$$

$$Q_m(s) = 1 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_m s^m \quad (13)$$

Yaklaşık olarak ifade edilecek $F(s)$ fonksiyonunun Taylor açılımı

$$F(s) \cong a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_k s^k + \dots \quad (14)$$

şeklindedir. $F(s) \cong R_{n,m}(s)$ yada

$$F(s) - R_{n,m}(s) = \frac{Z(s)}{Q_m(s)} \quad (15)$$

diğer bir değışle

$$F(s)Q_m(s) - P_n(s) = Z(s) \quad (16)$$

ilişkisi oluşturulur. Buradan

$$Z(s) = \sum_{j=n+m+1}^{\infty} c_j s^j = 0 + 0s + 0s^2 + \dots + c_{n+m+1} s^{n+m+1} + \dots$$

Eşitliğin sağ tarafındaki seri açılımının en düşük indeksi $n+m+1$ 'dir. Çünkü ilk $n+m$ terim $F(s)$ ve $R_{n,m}(s)$ 'in eşit olduğundan sıfırlanacaktır. Eğer seriler açılırsa aşağıdaki $n+m+1$ adet lineer denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} a_0 - p_0 &= 0 \\ q_1 a_0 + a_1 - p_1 &= 0 \\ q_2 a_0 + q_1 a_1 + a_2 - p_2 &= 0 \\ q_3 a_0 + q_2 a_1 + q_1 a_2 + a_3 - p_3 &= 0 \\ q_m a_{n-m} + q_{m-1} a_{n-m+1} + \dots + a_n - p_n &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ve

$$\begin{aligned} q_m a_{n-m+1} + q_{m-1} a_{n-m+2} + \dots + q_1 a_n + a_{n+1} &= 0 \\ q_m a_{n-m+2} + q_{m-1} a_{n-m+3} + \dots + q_1 a_{n-1} + a_{n+2} &= 0 \\ \dots & \\ q_m a_n + q_{m-1} a_{n+1} + \dots + q_1 a_{n+m-1} + a_{n+m} &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Yukarıdaki denklemleri çözmek için önce denklem (19) dan q_1, q_2, \dots, q_m bilinmeyenleri daha sonra denklem (18) den p_1, p_2, \dots, p_n bilinmeyenleri bulunur. Son olarak da (12) numaralı denklem oluşur.

4. ÖLÜ ZAMANLI SİSTEMLER İÇİN KATSAYI DİYAGRAM YÖNTEMİNİN UYGULANMASI

Eğer sistem ölü zaman içeriyorsa, yani sistem transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-as} \quad (19)$$

n	$R_{n,n}(s)$
1	$\frac{2-s}{2+s}$
2	$\frac{12-6s+s^2}{12+6s+s^2}$
3	$\frac{120-60s+12s^2-s^3}{120+60s+12s^2+s^3}$
4	$\frac{1680-840s+180s^2-20s^3+s^4}{1680+840s+180s^2+20s^3+s^4}$
5	$\frac{30240-15120s+3360s^2-420s^3+30s^4-s^5}{30240+15120s+3360s^2+420s^3+30s^4+s^5}$

Tablo 2 – 1 sn. lik ölü zamanın farklı mertebeden Padé yaklaşımları

biçimindeyse, öncelikle ölü zaman e^{-as} kısım 3 de anlatıldığı gibi Padé yaklaşımı yapılarak rasyonel polinomlar biçiminde yazılır ($n \geq m$ için).

$$e^{-as} \cong \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_1 s + p_0}{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_1 s + q_0}$$

Yapılan bu yaklaşım yüzünden sistem transfer fonksiyonu değişmektedir. Sistemin mertebesi yapılan yaklaşım mertebesine göre artmaktadır. Fakat tasarım yönteminde değişiklik olmayacaktır. Değişen kısım ise A(s), B(s) ve P(s) mertebelerinin n mertebe kadar artmasıdır. Mertebenin artması kullanılan kararlılık indeks sayısını artırmakta ve ayrıca denklem (9) çözülmesini zorlaştırmaktadır.

Ölü zaman içeren sistemler için KDY uygulamaları eşdeğer zaman sabitinin seçimi de önemli olmaktadır. Yerleşme süresi ölü zamana dikkate alınarak seçilmelidir. Yerleşme süresinin ölü zamana yakın seçildiğinde kontrol işaretinin büyük değerler almaktadır.

5. TASARIM ÖRNEKLERİ

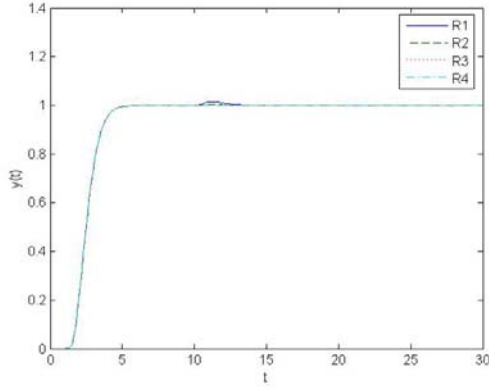
Bu bölümde ölü zamanlı 2 ayrı sistem ele alınacaktır. Ölü zamanın farklı Padé açılımları sonucunda ortaya çıkan sistem için katsayı diyagram yöntemi kullanılarak kontrolör tasarlanacaktır. Ayrıca kontrolör tasarımı yapılan sistemlere sırasıyla basamak biçiminde bozucu ve sinusoidal biçimde bozucu olmak üzere 2 farklı biçimdeki bozucu etkisi incelenecektir.

Örnek 1

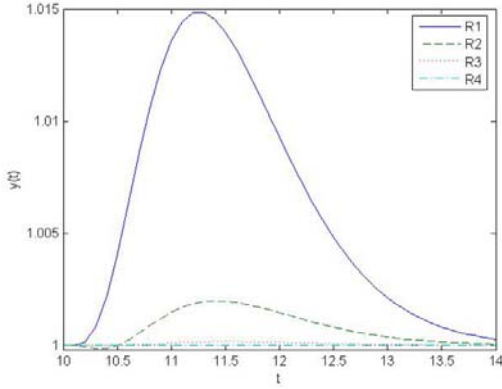
Üçüncü dereceden kararlı ve 1 saniye ölü zaman içeren bir sistem ele alalım.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} e^{-s} \quad (20)$$

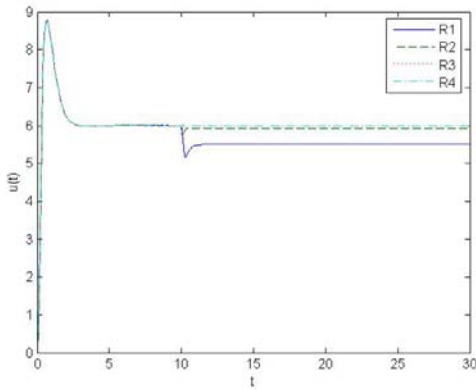
Sistemin 3 kökü de s-yarı düzlemin sol yarısında kalmaktadır. Bundan dolayı da kararlıdır. Sistemin 6 saniyede oturmasını ve aşım yapmamasını istensin. Benzetim sırasında sisteme ayrıca $t=10$ sn. de $q(t)=1$ biçiminde basamak bozucusu uygulansın.



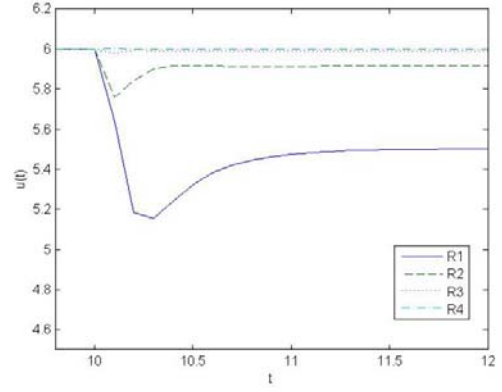
Şekil2a. Tablo 1 de görülen ölü zamanın 4. mertebeye kadar açarak yapılan yaklaşım sonucu örnek 1 için yapılan kontrolör tasarımının $y(t)$ kapalı çevrim sistem yanıtı



Şekil2b. Şekil 2a da bulunan kapalı çevrim sistem yanıtının kesimi



Şekil2c. $u(t)$ kontrol işareti



Şekil2d. Şekil2c de bulunan kontrol işaretinin kesimi

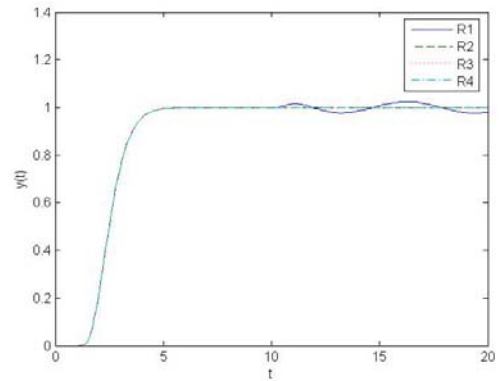
Belirtilen başlangıç koşullarına ilişkin öncelikle kararlılık indekslerini denklem (8) deki gibi standart Manabe biçiminde alalım. İkinci olarak sistemin 6 saniyede oturması istendiği için ve sistemde 1 saniyelik ölü zaman bulunduğu için eşdeğer zaman sabitini $\tau = 2$ olacaktır. Yapılan benzetim sonuçları Şekil 2 de görülmektedir.

Örnek 2

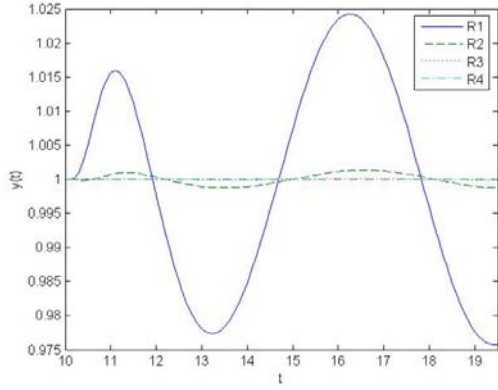
Üçüncü dereceden kararlı ve 1saniye ölü zaman içeren bir sistem ele alalım.

$$G(s) = \frac{1}{(s)(s+1)(s+2)} e^{-s}. \quad (21)$$

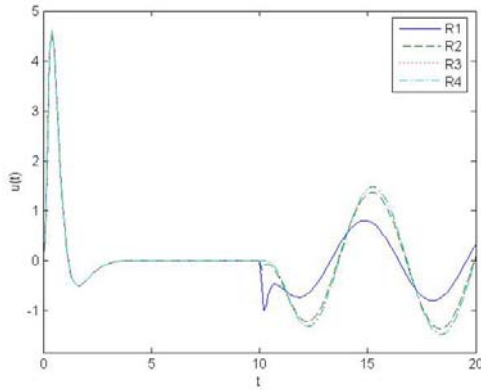
Sistemin 6 saniyede oturmasını ve aşım yapmamasını istensin. Benzetim sırasında sisteme ayrıca $t=10$ sn. de $q(t) = \sin(t)$ biçiminde sinüsoidal bozucu uygulansın.



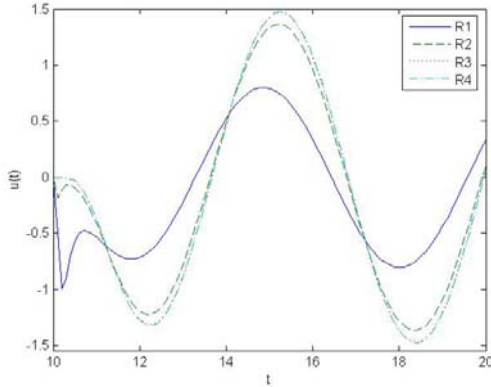
Şekil3a. Tablo 1 de görülen ölü zamanın 4. mertebeye kadar açarak yapılan yaklaşım sonucu örnek 2 için yapılan kontrolör tasarımının $y(t)$ kapalı çevrim sistem yanıtı



Şekil3b. Şekil 3a da bulunan kapalı çevrim sistem yanıtının kesimi



Şekil 3c. u(t) kontrol işareti



Şekil 3d. Şekil3c de bulunan kontrol işaretinin yakınlaştırılmış kesimi

Sinüs bozucusu etkilediği için başlangıç koşullarında değişme olacaktır[7]. Bu koşullar altında katsayı diyagram yöntemiyle tasarlanan kontrolörün birim basamak sistem yanıtı ve kontrolör işareti şekil 3 de görülmektedir.

6. SONUÇLAR

Uygulama sonuçlarında da görüldüğü gibi, katsayı diyagramı yöntemiyle oluşturulan kontrolörler sayesinde sistemin öngörülen zamanda yerleştiği ve kapalı çevrim sistem yanıtının aşısız olduğu görülür. Ayrıca bozucunun etkisinden dolayı oluşan

aşım ise kısa süre içerisinde giderilir ve sistem yine kararlı bir hale gelir.

Kontrol işareti ve kapalı çevrim sistem yanıtı değerlendirildiğinde, ölü zamanın yüksek mertebeden Padé yaklaşımı yapıldığında KDY ile tasarlanan kontrolörlerin bozucu etkisini çabuk etkisizleştirdiği ve bununla birlikte kontrol işaretindeki ani sıçramaların da azaldığı görülür.

KAYNAKLAR

- [1] Hamamcı, S. E., 2002. *Katsayı Diyagram Methodu' nun Özel Durumlara ve ÇGÇÇ Sistemlere Uygulanması*, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- [2] Kessler, C., 1960, *Ein Beitrag zur Theorie mehrschleifiger Regelungen*, Regelungstechnik, 8, 8, 261-266
- [3] Lipatov, A.V., (1976), *Some necessary and sufficient conditions that polynomials be of Hurwitz type*, Differents, Urayn, 12, 2269-2270.
- [4] Manabe, S., 1994a, *Coefficient Diagram Method as applied to the attitude control of controlled-bias-momentum satellite*, 13th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, 12-16 Sept., Palo Alto, CA, 322-327.
- [5] Manabe, S., 1998. *Coefficient Diagram Method*, 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Aug. 24-28, Seoul, Korea, 199-210.
- [6] Manabe, S., 1998c, *Coefficient Diagram Method*, 14th IFAC Symp. on Automatic Control in Aerospace, Aug. 24-28, Seoul, Korea, 199-210.
- [7] Öcal, Ö. (2004), *Katsayı Diyagram Yönteminin (KDY) kuramsal altyapısı ve değişik sistemlere uygulanması*, Yüksek Lisans Tezi, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği, Fen Bilimleri Enstitüsü, İTÜ
- [8] Sokolov, N. I. ve Lipatov, A. V., 1972, *On necessary conditions for stability of linear systems*, Tr. Mosk. Aviats. Inst., 240, 26-30