

SINIRDAN VE DOMENDEN UYARILAN BİR BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN GÖZLEYİCİ TASARIMI

Mehmet Önder Efe

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Söğütözü Cad. No 43, TR-06530 Söğütözü, Ankara

e-posta: onderefe@ieee.org

Anahtar sözcükler: Modelleme, Burgers Denklemi, Uyumlu Ortogonal Ayrışım

ABSTRACT

This paper demonstrates the observer design for a Partial Differential Equation (PDE) system named 1D Burgers equation. The design is based on the reduced order model presented in the accompanying paper [1]. A finite dimensional observer is designed for the finite dimensional plant model, and it is shown that there is a tight connection between the reduced order model and the observer in the sense of Lyapunov. The tests are performed on the infinite dimensional system and the results obtained have demonstrated that the observer performs well under several implementation challenges.

1. GİRİŞ

Uzayda süreklilik arzeden sistemlerin geribeslemeli kontrolü son yıllarda önem kazanmış konulardandır. Burgers denklemi de bu açıdan nonlineer doğası ve basitliği dolayısıyla tasarımcıların ilgisini çekmektedir. Denklem (1) ile verilen Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD) sisteminin (2) denkleminde verilen sonlu boyutlu Adi Diferansiyel Denklem (ADD) modeline nasıl dönüştürülebileceği [1] referansında tartışılmaktadır. Bu bildiri Burgers denkleminin ADD modeli kullanılarak geliştirilen bir gözleyicinin performansını ele alır. Aşağıda $x \in \Omega := [0,1]$ uzaysal domeni temsil etmektedir. Başlangıç koşulları $u(x,0) = 0 \forall x \in \Omega$ ile verilmekte, sınır koşulları ise $u(0,t) = \gamma_0(t)$, $u(1,t) = \gamma_1(t)$ olup $\gamma_0(t)$ ve $\gamma_1(t)$ serbestçe seçilebilen sınır uyarılarıdır. $\varepsilon = \mu = 1$ bilinen süreç parametreleridir.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x)\gamma_d(t) + \varepsilon \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \mu u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\dot{\alpha} = A\alpha - B(\alpha) + C\gamma_d + (D - E\alpha)\gamma_0 + (F - G\alpha)\gamma_1 \quad (2)$$

Burada $\alpha \in \mathfrak{R}^M$ durum vektörünü temsil etmekte, indirgenmiş modelin çıkışı ise $u(x,t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x)$ ile verilmektedir, [1].

Buna göre, ikinci bölümde gözleyici tasarımı, üçüncü bölümde indirgenmiş gözleyici ve sonsuz boyutlu gözleyici arasındaki ilişki, dördüncü bölümde simülasyon çalışması ve son olarak bildirinin sonuçları yer alacaktır.

2. KDD GÖZLEYİCİNİN TASARIMI

(1) denklemi ile verilen KDD’i (3) denklemindeki gibi yeniden yazalım.

$$u_t = c(x)\gamma_d + \varepsilon u_{xx} - \mu u u_x \quad (3)$$

Teorem: Burgers denklemi için (3) denklemi ile verilen sonsuz boyutlu gözleyici $K \in \mathfrak{R}$ için $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ domeninde evrensel üstel ve kararlı bir gözleyici teşkil eder,

$$v_t = c(x)\gamma_d + \varepsilon v_{xx} - \mu v v_x + K(u - v). \quad (3)$$

İspat: Aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu adayımı göz önüne alalım

$$V_o = \frac{1}{2} \int_0^1 (u - v)^2 dx \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= \int_0^1 (u_t - v_t)(u - v) dx \\ &= \int_0^1 (c(x)\gamma_d + \varepsilon u_{xx} - \mu u u_x)(u - v) dx \\ &\quad + \int_0^1 (-c(x)\gamma_d - \varepsilon v_{xx} + \mu v v_x - K(u - v))(u - v) dx \\ &= \int_0^1 (\varepsilon u_{xx} - \mu u u_x - \varepsilon v_{xx} + \mu v v_x - K(u - v))(u - v) dx \\ &= -2KV_o + \int_0^1 (\varepsilon u_{xx} - \mu u u_x - \varepsilon v_{xx} + \mu v v_x)(u - v) dx \quad (5) \end{aligned}$$

$s := u - v$ olsun. Buna göre,

$$\dot{V}_o = -2KV_o + \varepsilon \int_0^1 ss_{xx} dx - \mu \int_0^1 (uu_x - vv_x)(u-v) dx \quad (6)$$

Yukarıda görünen integral terimleri ayrı ayrı hesaplayalım. $s(1,t) = u(1,t) - v(1,t) = 0$ olduğu ve $s(0,t) = u(0,t) - v(0,t) = 0$ olduğu gözönüne alınırsa (6) denkleminde görülen ilk integral (7) deklemindeki gibi bir terime dönüşür,

$$\begin{aligned} \int_0^1 ss_{xx} dx &= ss_x \Big|_0^1 - \int_0^1 s_x^2 dx \\ &= s(1)s_x(1) - s(0)s_x(0) - \int_0^1 s_x^2 dx \\ &= -\int_0^1 s_x^2 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

(6) denkleminde görülen ikinci integral için aşağıdaki düzenleme yapılabilir:

$$\int_0^1 (u-v)(uu_x - vv_x) dx = \int_0^1 (u-v) \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 - v^2) dx \quad (8)$$

$\bar{\delta} := u^2 - v^2$ şeklinde yeni bir değişken tanımlayalım. Buna göre, $\bar{\delta}(0,t) := u^2(0,t) - v^2(0,t) = 0$, benzer şekilde $\bar{\delta}(1,t) := u^2(1,t) - v^2(1,t) = 0$ olacaktır. (8) denklemindeki integrandın Γ ise gösterilmesi ve (6) denkleminin düzenlenmesi bize (9) denklemini verecektir,

$$\begin{aligned} \dot{V}_o &= -2KV_o + \varepsilon \left(-\int_0^1 (u_x - v_x)^2 dx \right) - \mu \left(\int_0^1 \Gamma(\bar{\delta}, u, v) d\bar{\delta} \right) \\ &= -2KV_o - \varepsilon \int_0^1 (u_x - v_x)^2 dx \\ &< 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Yukarıdaki sonuca göre, $u(x,0)$ ile $v(x,0)$ arasındaki farktan bağımsız olarak $V_o(t)$ asimptotik olarak sifıra yaklaşacaktır. Diğer bir deyişle, zaman sonsuza giderken $v(x,t) \rightarrow u(x,t)$ yaklaşması üstel olarak gerçekleşecektir. Bir sonraki kısımda (3) ile verilen gözleyicinin indirgenmiş formu ve bunun anlamı üzerinde durulacaktır.

3. İNDİRGENMİŞ GÖZLEYİCİ VE SONSUZ BOYUTLU GÖZLEYİCİ

Denklem (3) ile verilen gözleyici bir KDD olduğu için sonlu boyutta durum vektörünün elde edilmesini sağlamaz. Şu haliyle sistem de gözleyici de sonsuz boyuttadır ve amacımız sonlu boyutta bir durum vektörü elde edebilmektir. Buna göre (2) denkleminde bakarak, eşdeğer gözleyiciyi (10) denkleminde verilen biçimde elde ederiz.

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= A\beta - B(\beta) + C\gamma_d + (D - E\beta)\gamma_0 + (F - G\beta)\gamma_1 \\ &+ K(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (10)$$

Burada, çıkış denklemi $v(x,t) = \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \phi_i(x)$ olduğu için $\Psi(x_m) = (\phi_1(x_m) \ \phi_2(x_m) \ \dots \ \phi_M(x_m))^T$ ile verilmekte, x_m ise geribeslemenin alındığı ölçüm noktasını temsil etmektedir. Bu verilere dayanarak, indirgenmiş modelin gerçek sistemi kusursuz temsil ettiği varsayımı altında aşağıdaki denklik elde edilir.

$$\begin{aligned} \hat{V}_o &= \frac{1}{2} \int_0^1 (u(x,t) - v(x,t))^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x) - \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \phi_i(x) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M (\alpha_i(t) - \beta_i(t)) \phi_i(x) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M e_i(t) \phi_i(x) \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^M e_i^2(t) \phi_i^2(x) dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M e_i(t) e_j(t) \phi_i(x) \phi_j(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M e_i^2(t) \left(\int_0^1 \phi_i^2(x) dx \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M \left(e_i(t) e_j(t) \int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M e_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M (e_i(t) e_j(t) \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M e_i^2(t) \end{aligned} \quad (11)$$

Burada $\int_0^1 \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}$ dir ve δ_{ij} Kronecker deltasını göstermektedir.

Yukarıdaki sonucun yorumu şöyledir: indirgenmiş model için tasarlanan gözleyici sonsuz boyutlu sistemin seçilen bir x_m noktasından alınan geribesleme ile seçilen M adet baskın durum değişkenini Lyapunov anlamında kararlı bir biçimde temin edecek, kontrol sistemi tasarımı yapılacak ise bu durum değişkenleri kullanılabilir.

Bu aşamada yapılan varsayımı geri dönmekte fayda vardır. UOA kullanarak model indirgeme işleminde temel varsayım –yukarıda da verildiği gibi– indirgenmiş modelin gerçek sistem cevabını kusursuz gerçekleştirebildiğidir. Bu ise KDD çözümünün uyumlu kiplerden müteşekkil olduğu varsayımını ve

ayrışmada elde edilen tekil değerlerin birbirlerinden farklı olduğuna işaret eder, [1-3]. Bu şartlar altında elde edilen indirgenmiş modelin ve buna bağlı olarak türetilen gözleyicinin kesinsizlik içermesi kaçınılmaz bir sonuç olmakla birlikte uygulanan prosedürün amacı ile de çelişki içerisinde değildir. Bir sonraki kısımda simülasyon sonuçları verilecek, gözleyicinin performansı değerlendirilecektir.

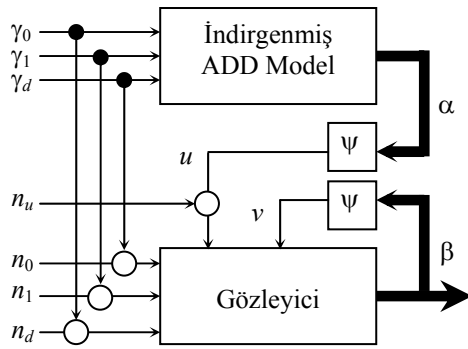
4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bir önceki kısımda (12) denklemleri ile verilen gözleyici ifadesinde K bir sabit, $\alpha-\beta$ ise $M \times 1$ vektördür. Pratik açıdan bakıldığında (4) denklemindeki $u-v$ teriminin her x değeri için temin edilemeyeceği açıktır. Dolayısıyla, ölçümü tek noktadan yapalım ve geribeslemenin alınacağı ölçüm noktasını x_m ile gösterelim. (12) denkleminin her iki tarafını $\Psi(x_m)^T = (\phi_1(x_m) \ \phi_2(x_m) \ \dots \ \phi_l(x_m))$ ile çarpılırsa (12) denklemindeki ADD'in her bir satırına $K(u-v)$ terimi gelecektir ve uygulamada gözleyici aşağıdaki yapıya kavuşacaktır. Bu yapının (12) denkleminde verilen gözleyiciye eşdeğer olduğu unutulmamalıdır.

$$\dot{\beta} = A\beta - B(\beta) + C\gamma_d + (D - E\beta)\gamma_0 + (F - G\beta)\gamma_1 + K'(u-v) \quad (10)$$

Burada $K' = (K \ K \ \dots \ K)^T$ dir.

Simülasyonlarda [1] referansında verilen değerlerden farklı olarak $K = 20$, $T = 4$ sn ve $x_m = 0.5$ seçilmiş ve Şekil 1 deki sistem gerçekleştirilmiştir.



Şekil-1. İndirgenmiş model ile gözleyicinin doğrulanması

Simülasyonlarda $\gamma_0(t)$ gürültü, $\gamma_1(t) = 0.1\sin(2\pi t)$ ve $\gamma_d(t) = \sin(2\pi t(2-t))$ seçilmiştir. Aynı girişler gözleyiciye gürültü eklenerek girilmiş, gürültü sinyalleri için $1e-5$ düzeyinde varyans öngörülmüştür. Benzer bir senaryo, indirgenmiş modelden elde edilen u çıkışı için de uygulanmış, gözleyicinin değişik kanallar yoluyla sinyalleri bozan etmenlere karşı davranışı incelenmiştir.

Gözleyicinin uygulanmasında bir diğer husus da sistemin (ya da gözleyicinin) durum vektörünün sıfırdan farklı başlangıç değerlerinde olabileceğidir. Verilen teorem ve ispat gereği, gözleyici bu durumlarda da istenen durum değişkenlerini kararlı ve gürbüz bir biçimde temin edebilmelidir. Bu sebeple $\beta(0) = [0.002 \ -0.001 \ 0.001 \ -0.0001 \ -0.0001]^T$ seçilmiştir.

Şekil 2'de elde edilen sonuçlar görülmektedir. Sol sütunda $M = 5$ adet durum değişkeninin indirgenmiş modelden ve karşı düşen gözleyiciden elde edilmiş değerleri $t \geq 0.08$ saniye için görülmektedir. Her bir durum değişkeninin alçak ve yüksek frekans ihtiva eden yerel bölgelerde hassas bir biçimde gerçekleştirilebilmesi dikkat çekilmesi gereken hususlardandır.

Sıfırdan farklı başlangıç koşullarının etkisi dolayısıyla ilk 0.08 saniyelik sürede hızlı fakat yakınsak salınımlar gerçekleşmektedir. Bu salınımları ve yakınsaklığı daha iyi görebilmek için Şekil 1'in sağ sütununda $\alpha-\beta$ değerleri ilk 0.08 saniye için verilmiş ve her bir hata teriminin hızla sıfıra eriştiği gözlemlenmiştir. Bu denemeler birçok farklı başlangıç koşulları ve gürültü seviyeleri için denenmiş, tamamında başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Burada seçilen değerler görselliği ön plana çıkarmak maksadı da taşımaktadır.

Simülasyonların ikinci kısmında Şekil 1'deki diyagram tekrar oluşturulmuş ancak indirgenmiş ADD model yerine (1) denklemleri ile verilen KDD Matlab/Simulink® ortamında gömülü olarak gerçekleştirilmiştir. Bu kısma ilişkin sonuçlar Şekil 3 ve Şekil 4'te verilmiştir. Tasarlanan gözleyici kararlı bir biçimde KDD nin $x = 0.5$ noktasından elde edilen çıkışı ($u(x_m, t)$) değerini izlemiş, bu esnada dominant durum değişkenlerini başarılı bir biçimde üretmiştir. Bu kısım için de farklı çalışma koşulları gözönüne alınmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

5. SONUÇLAR

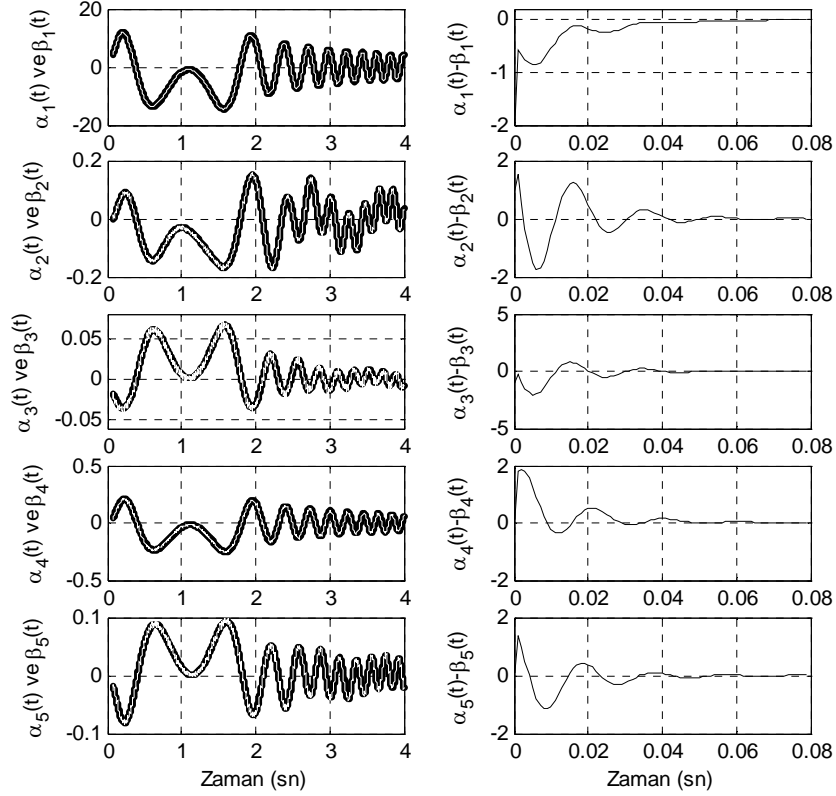
Bu çalışmada bir boyutlu Burges denklemi ile tasvir edilen dinamik için gözleyici tasarımı ele alınmıştır. Gözleyici tasarımı ADD sistemleri için iyi formüle edilmiş bir kavram olmakla birlikte, sistem bir KDD ise her zaman sonuç verecek yöntem olarak kabul edilebilecek bir yöntem mevcut değildir. Bu çalışmada Lyapunov kararlılık yaklaşımı ile sınırdan ve domenden uyarılan Burgers denklemi için gürültülü koşullar altında indirgenmiş bir gözleyici tasarlanmış ve benzetimler aracılığı ile gözleyicinin kullanılabilirliği gösterilmiştir. Sunulan yaklaşım ADD yapısında bir gözleyici vermekte, bu gözleyici KDD yapısındaki muadiline Lyapunov anlamında eşdeğer olmaktadır.

KAYNAKLAR

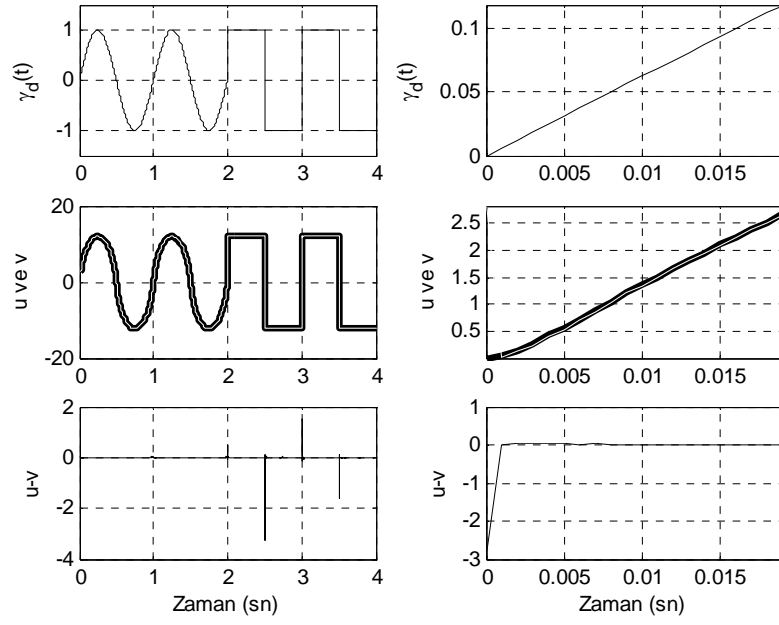
- [1] Efe, M.Ö., Sınırdan ve Domenden Uyarılan Bir Boyutlu Burgers Denklemi için Model İndirgeme, III OTOMASYON SEMPOZYUMU VE SERGİSİ, 11-12 Kasım, Pamukkale Üniversitesi, Denizli, Türkiye, 2005.
- [2] Ravindran, S. S., A Reduced Order Approach for Optimal Control of Fluids Using Proper Orthogonal Decomposition, INTERNATIONAL JOU.

FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, Vol. 34, pp.425–488, 2000.

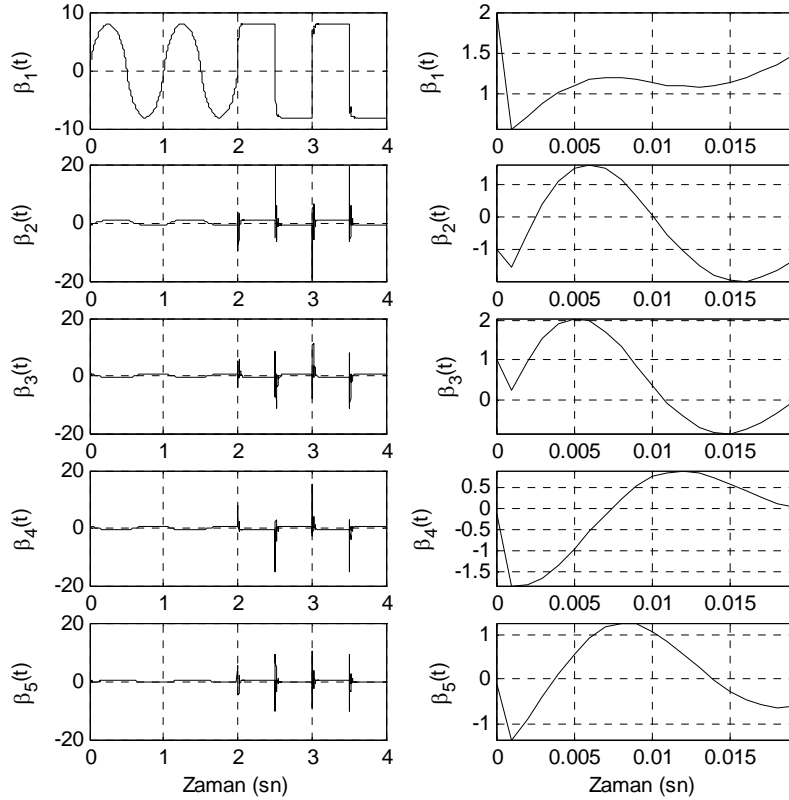
- [3] Ly, H.V., ve Tran, H.T., Modeling and Control of Physical Processes Using Proper Orthogonal Decomposition, MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING OF DYNAMICAL SYSTEMS, Vol.33, pp. 223–236, 2001.



Şekil-2. İndirgenmiş gözleyicinin kipleri gerçekleşmesi ve başlangıç anındaki yakınsak salınımlar



Şekil-3. Üst satır: Domenden uygulanan ($\gamma_d(t)$) uyarı sinyali, Orta satır: KDD çözücünün ve gözleyicinin $x = 0.5$ noktasında ürettikleri u (kalın, KDD'den) ve v (beyaz, gözleyiciden) değerleri, Alt satır: u ve v değerleri arasındaki fark. Sol sütunda $t \geq 0.02$ sn. değerleri, sağ sütunda ise başlangıç dinamiğini görebilmek için $t \leq 0.02$ sn. değerleri gösterilmiştir.



Şekil-4. Gözleyicinin KDD ile kullanıldığında durum değişkenlerinin zamanla değişimi. Sol sütunda $t \geq 0.02$ sn. değerleri, sağ sütunda ise başlangıç dinamiğini görebilmek için $t \leq 0.02$ sn. değerleri gösterilmiştir.