

Geçen Sayıdaki Soruların Çözümleri

1) $(k + \sqrt{k^2 - 1})^n$ 'in. büyük n için tamsayı olduğunu göstermek istiyoruz.

$$\text{Siny} = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \sqrt{k^2 - 1} \quad \text{tanımlayalım.}$$

$$\text{Bu durumda Coshy} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = k \text{ olacaktır.}$$

$$(k + \sqrt{k^2 - 1})^n - (\text{Siny} + \text{Coshy})^n = e^{ny} \text{ yazılabilir.}$$

Öte yandan, Coshy tanımından, $e^{ny} = 2 \text{Cosh}(ny) - e^{-ny}$ olduğu kolayca görülür.

n büyüdükünde e^{-ny} sifıra yaklaşacaktır.

Demek ki, Coshy tamsayı ise $\text{Cosh}(ny)$ 'in tam sayı olduğunu göstermek yetecektir.

$$\frac{e^{ny} + e^{-ny}}{2} = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^{m+ny} + e^{-(m+ny)}}{2} + \frac{e^{(m-1)y} + e^{-(m-1)y}}{2}$$

denklemini düşünelim.

Bu denklem,

$$\text{Cosh}(my) = \text{Coshy} + \frac{1}{2} \text{Cosh}(m+1)y + \frac{1}{2} \text{Cosh}(m-1)y$$

denkleminin açık şeklinden başka birşey değildir.

O halde,

$$\text{Cosh}(m+1)y - 2 \text{Cosh}(my) + \text{Cosh}(m-1)y = 0$$

m - 1'den başlayarak, Coshy tamsayı ise bütün n'ler için $\text{Cosh}(ny)$ 'nin tamsayı olduğu bu denklemle gösterilebilir.

Demek ki, büyük n için $(k + \sqrt{k^2 - 1})^n$ tam sayıdır.

2) Listedeki cümleler şöyle sıralanmıştır:

"Bu listedeki yanlış cümlelerin sayısı birden fazladır"

"Bu listedeki yanlış cümlelerin sayısı ikiden fazladır"

"Bu listedeki yanlış cümlelerin sayısı üçden fazladır"

"Bu listedeki yanlış cümlelerin sayısı n'den fazladır"

Listede, r. cümle yanlışsa r'den sonra gelen cümleler de yanlıştır. O halde, cümleler, r.'ye kadar doğru, ondan sonra yanlış şekilde dizilmiş olmalıdır. Şimdi r,i bulalım, r. cümle doğru olduğuna göre, yanlış cümlelerin sayısı r/den fazladır. r,+1. Cümle yanlış olduğuna göre yanlış cümlelerin sayısı r,+1'den fazla değildir. O halde r,+1 tane yanlış cümle vardır, r. tane de doğru cümle olduğuna göre, $2r,+1 \leq n$ sonucu çıkar.

Demek ki çözüm bulunabilmesi için n tek sayı olmalıdır ve

$$\text{çözüm "İlk } \frac{n-1}{2} \text{ cümle doğru, sonrakiler}$$

yanlıştır" şeklindedir,

n çiftse soruda bir paradoks vardır.

$$3) f(x) = \ln \left(\frac{e^a x^V}{e^{3x}} \right)$$

$$= a + (a+x) \ln x - 3x$$

tanımlayalım.

f'(e) = 0 olduğu kolayca görülür.

$$f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 3 = 0 \Rightarrow f'(e) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(e) = 0$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(e) > 0$$

O halde, sırasıyla $x > e$ için, $f''(x) > 0$

$$f'(e) > 0$$

ve $f(e) > 0$ olduğu görülür.

$x > e \Rightarrow f(x) > 0$ yazılır.

Soru 1

A'nın alanının B'ninkine eşit olduğunu gösteriniz.



Soru 2 (Murat AZİZOĞLU)

Dikdörtgen bir masada, şöyle bir oyun oynuyorsunuz: Rakibiniz ve siz, sırayla masaya eşit büyüklükte paralar koyuyorsunuz. Paranızı başka bir paranın üzerine getirmek veya masanın dışına taşımak yasak. Masada yer kalmaması nedeniyle para koyamayan taraf, oyunu kaybediyor. Oyuna ilk kimin başlayacağına siz karar vereceksiniz. Ne karar verir, nasıl oynar ve kazanırsınız?

(Paraların ve masanın büyüklüğü önemli değil)

Soru 3 (Anonim)

Ortada 100 adet çöp var ve rakibinizle siz, sırasıyla çöpleri alıyorsunuz. 1'den 5'e kadar herhangi bir sayıda çöp alabilirsiniz. Son çöprü alan kazanıyor. Oyuna kimin başlayacağına siz karar veriyorsunuz. Ne karar verir, nasıl oynar ve kazanırsınız?