ÜDK: 518.83

Çizge Kuramının Temelleri 2

Yurdakul CEYHUN

ÖZET

Bu yazıda çizge kuramının diğer kavramları verilerek temel konutlar ve örü çözümlemesinin ana ilkeleri ortaya konmuştur.

SUMMARY

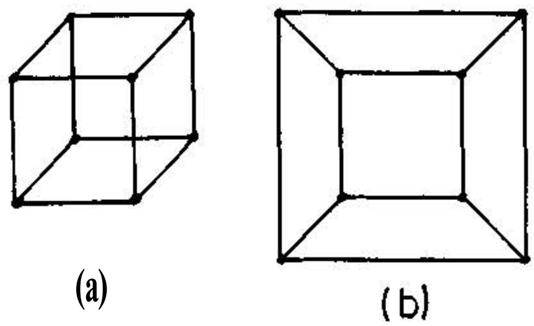
Further properties and the fundamentat postulat es of graph theory are stated and the main analysis procedure for networks is outlined.

4. DÜZLEMSEL ÇİZGELER VE İKİLEMLİK

Çizgelerin özelliklerine göre ayrımları yapıldığında düzlemsellik önemli bir etken olarak ortaya çıkmaktadır.

Tanım 4.1

Bir düzleme, çizgileri düğümlerden başka yerlerde çakışmadan çizilebilen çizgelere «düzlemsel» çizgeler denir.



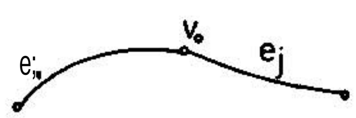
Şekil 4.1.

Yurdakul Ceyhun, Y. Prof. Dr., Elektrik Mühendisliği Bölümü, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara
Bu yazının birinci bölümü dergimizin 205-206. Sayısında (sayfa 47-58) çıkmıştı.

Şekil 4.1a'da 3-boyutlu uzaya çizilmiş çizge, Şekil 4.1b'de çizgileri düğümlerden başka yerlerde çakışmadan 2-boyutlu uzaya, düzleme, yeniden çizilebilmiştir. Dolayısı ile bu bir düzlemsel çizgedir.

Tanım 4.2

Kertesi kesinlikle iki olan v_o düğümü, eğer e, ve e, çizgilerinin ortak çakıştıkları tek düğüm ise, bu çizgiler «ardıl bağlıdırlar».



Şekil 4.2.

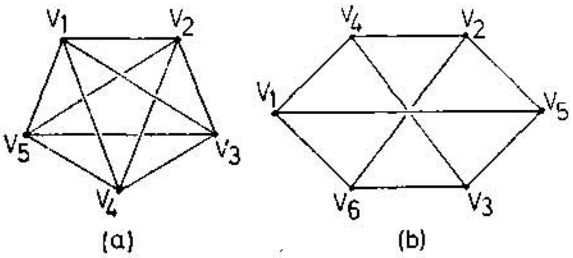
Şekil 4.2 .de ardıl bağlanmış iki çizgi görülmektedir.

Tanım 43

$V_,$, V_2, V_3, V_4, V_5 diye adlandıracağımız beş düğümden oluşan bir düğüm kümesi düşünelim. Eğer bu kümedeki her düğüm çiftinin arasında bir çizgi ya da ardıl bağlanmış çizgiler varsa buna «Birinci Tür Kuratovvski Çizgesi» (Kİ) denir.

Tanım 4.4

V_1, V_2, V_3 ve V_4, V_5, V_6 diye adlandırılan düğümlerden oluşan iki ayrı düğüm kümesi düşünelim. Eğer bu kümelerden her birinin düğümü diğerinin büiün düğümlerine bir ya da ardıl çizgilerle bağlanmış ise buna «îkinci Tür KuratOA'ski Çizgesi» (K2) denir.



Şeldl 43.

Şekil 4.3a ve 4.3b'de, sırasıyla, Kİ ve K2 için birer örnek verilmiştir. Şimdi bir çizgenin düzlemselliğini saptıyan ana tanıtlanması bu yazı dizisinin çok ötesinde olan bir teoremi sunacağız.

Teorem 4.1

Bir çizgenin düzlemsel olabilmesi için gerek ve yeter koşul, hiç bir tür Kuratowski çizgesinin bu çizgenin bir altçizgesi olmamasıdır.

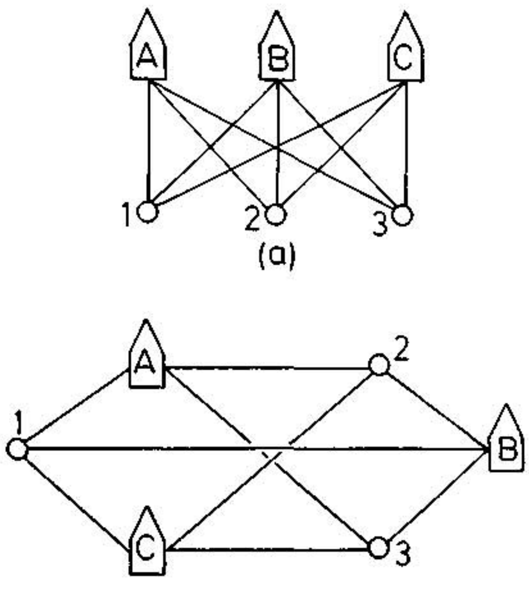
Düzlemsellik kavramının ve Teorem 4.1'in ilginç bir uygulaması olarak şu bulmacayı düşünelim. Şekil 4.4a'da gösterildiği gibi yanyana üç evde (A, B, C) üç düşman kişi oturuyorlar. Her birinin evinin karşısında birer kuyu var (1, 2, 3). Her biri bu üç kuyuya birbirleri ile kesişmeyen birer yol yapmak istiyorlar. Acaba bu sorunun çözümü var mıdır?

Şekil 4.4a, 4.4b deki gibi yeniden çizilirse bunun bir ikinci tür Kuratovvski çizgesi olduğu görülür. Demek ki bu bulmacanın da çözümü yoktur.

Düzlemsel çizgelerin önemli bir özelliği de verilen bir düzlemsel çizgeye ikilem olan diğer bir çizgenin var oluşudur. İkilem çizgenin tanımı şöylece verilebilir.

Tanım 4.5

Çizgileri arasında bire bir karşıtlık olan G, ve G_2 çizgelerini düşünelim. H_v G^n gelişi güzel bir altçizgesi olsun. H, in Gj deki tümler alt-



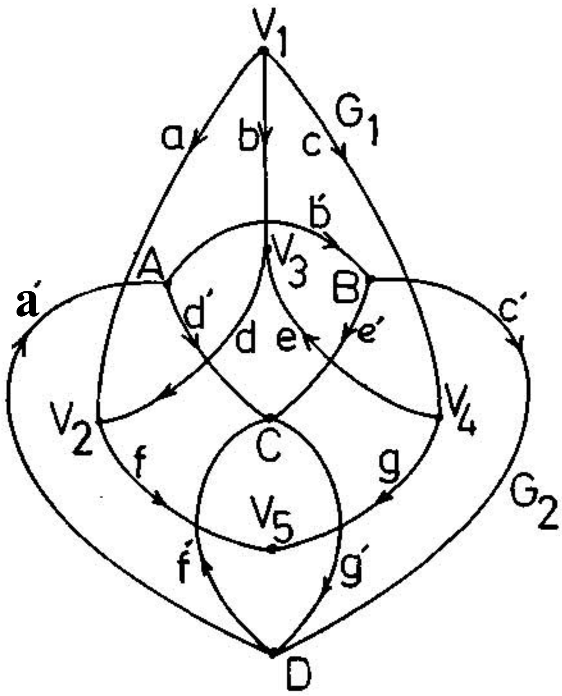
(b)

Şekil 4.4.

çizgesinin G_2 deki karşıtına H_2 diyelim. r_2 ve R_2 sırasıyla H_2 ve G_2 nin aşamaları ve n, de G, in sıfırlığı olsun. Seçilebilecek her H_t için

$$r_2 = R_2 - n, \tag{4.1}$$

bağlantısı sağlanıyor ise, G, ve G_2 birbirlerinin «ikilemleridir».



Şekil 4.5.

Teorem 4.2

Her düzlemsel çizgenin birik bir ikilemi vardır. Bu teoremin de tanıtını vermiyerek, ikilem çizgenin elde edilmesi için kolaylıkla uygulanabilir bir yol göstereceğiz. Şekil 4.5'de gösterilen çizgeyi düşünelim. A, B ve C ile adlandıracağımız birer düğümü, (a, b, d), (b, c, e) ve (d, e, f, g) çizgileri ile tanımlanan birer kapalı bölgeye (göz) yerleştirelim. Diğer bir düğüm D ise dış bölgeye konsun. A ve D düğümlerinin konduğu bölgeleri ayıran a çizgisini keserek bu iki düğümü birleştiren çizgiye a' diyelim. Bu yolu izliyerek A, B, C ve D deki her düğüm çiftini, verilen çizgenin çizgilerini yalnız birer kez keserek yeni çizgilerle birleştirelim. Elde edilecek ve düğümleri A, B, C ve D olan bu yeni çizge (G_2) Gj in ikilemidir. G_t ve G_2 çizgelerinin ikilemlikleri Tanım 4.5'in uygualınması ile kolayca görülebilir. G_2 deki çizgilerin yönlendirilmesi ise şöyle yapılabilir. V düğümünün konduğu bölgeyi tanımlayan çizgelerden birinin (e) yönü Vye göre saat dönme yönünde (tersi) ise e çizgisini kesen e' çizgisi V düğümünden uzaklaşıyordur (düğümüne geliyordur).

Birbirlerinin iklemi olan G, ve G_2 çizgelerini düşünelim. Kolaylıkla görülür ki, G, de bir ağaç (tümlerağaç) oluşturan çizgilerin G_2 deki karşıtları bir tümlerağaç (ağaç) oluşturmaktadır. Bu gözlenimin sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3

Düzlemsel bir çizgenin çevre ve kesitleme matrisleri, bu çizgenin ikileminde sırasıyla kesitleme ve çevre matrislerine dönüşürler.

Örnek olarak Biçim 4.5 deki G_t ve G_2 çizgelerini düşünelim G, in çakışım matrisi $\tilde{\text{ft}}$.

$$\tilde{\pi}_t = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4.2)$$

dir. G_2 nin çakışım matrisi $\tilde{TC}_2$ i[se]

$$\tilde{7T2} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a' & b' & c' & d' & e' & F & g' \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4.3)$$

dir. (a, b, e, f) Gj çizgesinde seçilen bir ağaç olsun. Bu ağaca göre B_{1f}

$$B_{1f} = \begin{array}{c} \\ d \\ e \\ g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & f & d & e & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4.4)$$

olarak bulunur. G, deki bu ağaca karşıt G_2 deki ağaç (d', e', g') çizgilerinden oluşur. Böylelikle G_2 deki B_{2f}

$$B_{2f} = \begin{array}{c} \\ a' \\ b' \\ c' \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a' & b' & c' & F & d' & e' & g' \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4.5)$$

dir. Benzer işlemler kesitleme denklemleri için yapıldığında,

$$A_{1f} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & f & d & e & g \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4.6)$$

ve

$$A_{2f} = \begin{array}{c} \\ d' \\ e' \\ g' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a' & b'' & c' & f & d' & e' & g' \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (4.7)$$

olduğu görülür. Buradan bir genelleme yapıldığında birbirlerine ikilem olan çizgeler için

$$B_{1f} = A_{2f} \qquad (4.8)$$

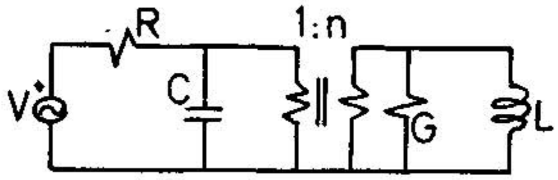
ve

$$A - R \qquad (4\ 9)$$

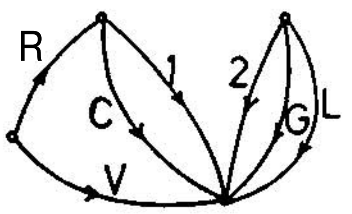
bulunur. İlginç bir sorun da ikilem - çizgelerin çakışım matrisleri $\tilde{ıtı}$. $\tilde{TJZ}$ arasında bir ilişki bulunup bulunamıyacağıdır ki bu sorunu düşünülmek üzere okuyucuya bırakacağız.

5. ÖRÜLERE UYGULAMA VE TEMEL KONUTLAR

Şimdiye dek yalnızca çizgelerden söz ettik ve bunları oluşturan çizgilere bir anlam vermedik. Rasgele öğelerden oluşan bir örü düşünürsek, bu öğelerin uçlarına ilişkin tanımlıyacağımız çizgilerden oluşan bir çizge bu örünün dokusunu simgesel olarak ortaya koyacaktır, örneğin Şekil 5.1a daki elektriksel örüyü düşünelim. Örüdeki öğelerin uçlarına ilişkin kapılan birer çizgi ile gösterecek olursak örünün dokusunu tanımlıyacak çizge kolaylıkla



(a)



(b)

Şekli 5.1.

ortaya çıkar. (Şekil 5.1b). Elde edilen çizgedeki her bir çizgiye ilişkin iki değişken (bu örnekte akım ve gerilim) tanımlıyahm. X gerilimler ve Y akımlar olsun. Bu durumda,

Konut 1 $BX = 0$ **(5.1)**

Konut 2 $AY = 0$ (5.2)

Bu konutlara sırasıyla çevre ve kesitleme konutları diyeceğiz. Başka bir deyişle, çizgedeki her çevre ve kesitleme için, sırasıyla, gerilim ve akımların cebirsel toplamları özdeş olarak sıfırdır. Çizgede seçilen bir ağaca göre yalnızca temel çevre ve kesitlemeler düşünüldüğünde

$$[B_f \;\; U] \begin{bmatrix} X_b \\ X_c \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.3)$$

ve

$$[U \;\; A_t] \begin{bmatrix} Y_b \\ Y_c \end{bmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

bulunur. Burada b ve c altsimgeleri sırasıyla dal ve kirişleri tanımlamaktadır.

öyle ise,

$$Y_b = -A_t Y_c \qquad (5.5)$$

ve

$$X_c = -B_f X_b \qquad (5.6)$$

elde edilir. Denklem (5.5) ve (5.6) dan yapılacak gözlem aşağıdaki teoremde olduğu gibi özetlenebilir.

Teorem 5.1

Çizgesinde e kadar çizgi olan bir örünün toplam 2e kadar bilinmiyenini çözmek için en çok **e** kadarının bilinmesi gereklidir.

Tanıt

Denklem (5.5) ve (5.6) dan sırasıyla bütün kiriş akımları ve dal gerilimlerinin bilinmesi ile, örüdeki diğer bilinmiyenler olan dal akım ve kiriş gerilimlerinin birik olarak bulunabileceği görüîür.

Diğer bir gözlem ise şöylece özetlenebilir.

Teorem *5.2*

Rasgele bir örüdeki akım (Y) ve gerilim (X) değişkenleri arasındaki

$$X^T Y = Y^T X = 0 \qquad (5.7)$$

ilişkisi her zaman geçerlidir.

Tanıt

Denklem (5.3) ve (5.4) den

$$X^T Y = X_b^T Y_b + X_c^T Y_c$$

Denklem (5.5) ve (5.6) dan,

$$X^T Y = -X_b^T A_t Y_c - X_b^T B_f^T Y_c$$

Geçen yazıdaki teorem 3.3 ün denklem (3.21) inden

$$A_t = -B_f^T$$

kullanıldığında Teorem 5.2 kanıtlanmış olur.

6. UÇ DENKLEMLERİNİN KULLANILIŞI

Teorem 5.1'de örüye ilişkin 2e kadar bilinmiyenin en çok e kadarının bilinmesinin yeterli olacağı gösterilmişti. Oysa her çizgiye ilişkin iki değişkenin arasında genellikle bir bağıntı olacaktır, örneğin (n+1) uçlu bir öğenin n kadar bağımsız kapısına ilişkin n kadar çizgide tanımlanan 2n değişken birbirlerine n+1 uçlu öğenin «uç denklemleri» diye adlandırdığımız bir denklem dizisi ile bağlıdırlar. Bu denklemler Laplace uzayında

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

olarak yazılabilirler. Denklem (6.1) de tanımlanan öğenin uç gerilim ve akımları sırasıyla,

$$X(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

ve

$$Y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

olsun. Denklem (5.5)'den görülür ki, kiriş akımları dilendiği gibi seçilseler bile bu seçim birik dal akımları tanımlamaktadır. Ya da denklem (5.6) incelendiğinde dal gerilimlerinin dilendiği gibi seçilmesi yine birik kiriş gerilimlerini vermektedir. Beri yandan denklem (6.1), H_{13} (s) ler ne olursa olsun rasgele verilen Yj (s) ve X_2 (s) için birik X, (s) ve Y_2 (s) tanımlamaktadır, îşte bu gözlemlerden elde edilen sonuç Xj (s) ve Y_2 (s) e karşıt olan çizgilerin sırasıyla ağaç ve tümler ağaçta olmalarını önerir, tik bakışta tersmiş gibi gelen bu yargıya biraz daha yakından bakalım. Denklem (6.1) deki Y, (s) ve X_2 (s) örüyü süren bağımsız kaynaklar olabilir, dolayısı ile X! (s) ve Y_2 (s) her tür koşuldan uzak yalnızca uç denklemleri ile tanımlanmış olur. Başka bir deyişle bunlar, bir yerde gelişi güzel seçilebilen değişkenler olarak düşünülmelidirler. Dolayısı ile, X! (s) in çizgileri ağaçta, Y_2 (s) in çizgileri ise tümlerağaçta olmalıdır. İşte uç denklemleri, ve ağaca ilişkin yukarda yaptığımız irdeleme sonucu, bulunması gerekli bilinmiyenlerin sayısı genellikle e den az olacaktır, örneğin, 2 uçlu R, L ve C öğelerinden oluşmuş devreler için bu sayı bağımsız kaynaklar dışındaki ağaç ya da tümlerağaçtaki çizgilerin tümüne eşittir.

KAYNAKLAR

Konuyla ilgili araştırmacılara ışık tutabilecek nitelikteki çizge kuramıyla ilgili kaynaklan aşağıda sunuyoruz.

1. *Benes, V. E.,* «ıMathematical Theory of Connecting Networks and Telephone Traffic», Academic Press, 1965.
2. *Berge, C,* «The Theory of Graphs and its Application», Wiley, 1962.
3. *Berge, C,* «The Theory of Graphs», Methuen, 1962.
4. ***Berge, C, ve Ghouila-Houri, A.,*** **«Program**ming, Games and Transportation Netvvorks», Wiley, 1962.
5. ***Busacker, R. B. ve Saaty, T. L,*** **«Finite** Graphs and Netvvorks: An Introduction with Applications», McGraw-Hill, 1965.
6. *Dantzig, G. B.,* «Linear Programming and Extensions», Princeton University Press, 1963.
7. *Deo, N.,* «An Extensive English Language Bibliography on Gŕaph Theory and its Applications», NASA, Jet Propulsion Lab., California Inst. of Tech., Pasadena, Cal., 1969.
8. ***Erdos, P. ve Katotta, G,,*** **«Theory of Graphs»,** Academic Press, 1968.
9. ***Ford, L. R. Jr. ve Fulkerson, D. R.,*** **«Flows** in Netvvorks», Princeton University Press, 1962.
10. ***Frank, H. ve Frish, I. T.,*** **«Communication,** Transmission and Transportation Netvvorks», Addison-Wesley, 1971.
11. *Harary, F.,* «A Seminar on Graph Theory», Holt, Rinehart ve Winston, 1967.
12. *Harary, F.,* «Graph Theory and Theoretical Physics», Academic Press, 1967.
13. *Harary, F.,* «Graph Theory», Addison Wesley, 1969.
14. ***Harary, F., Norman, R. Z. ve Cartwright, D.,*** «Structural Models : An Introduction to the Theory of Directed Graphs», Wiley, 1965.
15. *Kaufmann, A.,* «Graphs, Dynamic Programming, and Finite Games», Academic Press, 1967.
16. ***Kim, W. H. ve Chien, R. T. W.,*** **«Topologi**cal Analysis and Synthesis of Communication Netvvorks», Columbia University Press, 1962.
17. *Kleinrock, L.,* «Communication Nets-Stoo hastic Message Flow and Delay», McGraw HiU, 1964.
18. ***Koenig, H. E., Tokad, Y., Kesevan, H. K.,*** «Analysis ot Dicrete Physical Systems», McGravvnHill, 1967.
19. ***Maxwell, L. M. ve Reed, M. B.,*** **«The Theory** pf Graphs», Pergamon Press, 1971.
20. *Network, Int. Journal* (Dergi) 1971 yılından beri Interscience Publishers tarafından yayınlanmaktadır.
21. *Ore. O.,* «Theory of Graphs», American Mathematical Society Cambridge CoUoquium Publications, Vol. 38, 1962.
22. *Ore, O.:.,* «Graphs and their Uses», Random House, 1963.
23. *Ore, O.:.,* «The Four Color Problem», Academic Press, 1967.
24. ***Seshu, S. ve Reed, M. B.,*** **«Linear Graphs** and Electrical Netvvorks», Addison-Wesley, 1961.
25. *Tokad, Y.,* «Foundations of Passive Electrical Network Synthesis», ODTÜ yayınlan, 1971.
26. *Turner, J.,* «Key Word Indexed Bibliography on Graph Theory», Stanford Research Inst. Report. SRİ Project 145591-W. O. A14, Feb. 1964.
27. *Tutte, W. T.,* «Connectivity in Graphs», University of Toronto Press, 1966.
28. *Zykov, A.* A, «Bibliography on Graph Theory», Theory of Graphs and its Applications, Proc. of the Symp. held in Sinolenice, June 1963, Academic Press, 1964.

Yazıda geçen bazı terimlerin İngilizce karşılıkları :

Altsimge	—	Subscript
Ardıl Bağlantı	—	Series Connection
Bölge	—	Region
Çizge	—	Graph
Çizgi (Ayrıt)	—	Edge
Doku	—	Topology
Düzlemsel	—	Planar
Göz	—	Window
İkilem	—	Dual
örü	—	Network