
6. teknik kongre

ÇOK DÖNGÜLÜ DOĞRUSAL DİZGELERİN TASARIMI

ÖZAY HÜSEYİN
EROL SEZER

UDK: 621.3-501

ÖZET

Bu tanıtma yazısında çok döngülü doğrusal denetim dizgeleri ve bunlara ilişkin sorunlar ele alınmış, bu tür dizgelerin tasarımında kullanılmak üzere geliştirilen "evrik Nyquist sıra" ve "trasal yer-eğrileri" yöntemleri ayrıntılarıyla incelenmiştir.

SUMMARY

in this article, design problems of linear multi-variable control systems are studied, and "inverse Nyquist array" and "characteristic loci" techniques used in the design of such systems are explained in detail.

1. GİRİŞ

Son yıllarda teknolojiye hızlı gelişmeler sonucu ortaya çıkan büyük ve karmaşık dizgeler (sistemler) önemli denetim sorunlarını da beraberlerinde getirdiler. Bu sorunların çözümüne doğru atılan ilk adımlardan bu yana bu konuda çeşitli kuramlar geliştirildi ve belirli dizgelere uygulandı.

Bu yöndeki çalışmaların başlangıcı olarak kabul edilen ve Nyquist [1] ve Bode [2] tarafından ör-

özay Hüseyin, Asos.Prof.Dr., ODTÜ
Erol Sezer, Asistan, ODTÜ

6. teknik kongre

taya atılan tasarım (design) yöntemleri, yalın dizgelere başarıyla uygulanabilmelerine karşın, dizgelerin gelişmesi ve karmaşıklaşmasıyla ortaya çıkan yeni sorunların çözümünde yetersiz kaldılar. Çok değişkenli (ya da çok.döngülü) dizgeler olarak tanımlayabileceğimiz bu karmaşık dizgelerin gerek çözümlenmesinde (analizinde) gerekse tasarımında kullanılacak kuramları geliştirmek üzere 1950'lerde başlatılan araştırmalar günümüzde de sürmektedir, özellikle son yıllarda, bilgisayarların dizge tasarımında kullanılmalarından sonra bu araştırmalar önemli boyutlara ulaşmıştır.

Çok döngülü (multiloop) dizgelerin denetimi konusunda yapılan araştırmalar ve geliştirilen yöntemler iki ayrı sınıfta toplanırlar: Zaman bölgesi (domeni) yöntemleri ve frekans bölgesi yöntemleri. Bu konuda yapılan ilk çalışmaların yöneldiği zaman bölgesi yöntemleri, optimal denetim[3,4], kutup kaydırma ve kipsel (modal) denetim [5,6] gibi tanımlanmış durum uzayı (state-space) yöntemlerini kapsar. Etkileşmez (noninteracting) denetim [8] tekniğiyle başlayan ve dizge çözümlenme ve tasarımında cebirsel yöntemlerin giderek daha çok kullanılmaları sonucu gelişen frekans bölgesi yöntemleri ise, değişmeli (komütatif) denetleç tasarımı [9]t evrik Nyquist sıra (inverse Nyquist array)[10] ve ırsal yereğrileri (characteristic loci) [11,12] tasarım tekniklerini kapsar.

Yazında, gerek zaman bölgesi, gerekse frekans bölgesi yöntemlerine ilişkin ayrıntılı bilgi ve eleştiriler bulunmaktadır [13,14]. Burada belirtilmesi gereken önemli bir nokta evrik Nyquist sıra ve ırsal yereğrileri yöntemleri dışındaki tüm yöntemlerin az ya da çok bireşime (senteze) yönelik olmalarıdır. Başka bir deyişle, bu yöntemlerde, dizgenin sağlanması gereken koşullar ve bu koşulları sağlayan dizgenin tasarımında izlenecek yol kesin bir şekilde belirlenmiştir. Bu durumda, her yöntem, yalnızca belirli koşulların tam olarak sağlandığı tek bir çözüm vermekte; tasarımcıya, daha iyi sonuçlara ulaşmak için bu koşulları değiştirmede özgürlük tanımamaktadır, öte yandan, bu yazıda incelenecek olan evrik Nyquist sıra ve ırsal yereğrileri yöntemlerinde, tasarımcı, dizgenin sağlanması gereken koşulları önceliklerine göre sıralamakta ve bu koşullar arasında bir uzlaşmaya varmada kendi yeteneğini kullanabilmektedir.

2. ÇOK DÖNGÜLÜ DENETİM DİZGELERİ ve İLİŞKİN SORUNLAR

Çok döngülü doğrusal bir denetim dizgesinin en genel gösterilişi Şekil 1'de verilmiştir. Şekilde kullanılan semboller şöyledir:

$r(s)$: m bileşenli kapalı-döngü dizge giriş vektörü

$e(s)$: m bileşenli yanlışlık vektörü

$u(s)$: 1 bileşenli dizge giriş vektörü

$z(s)$: k bileşenli dizge çıkış vektörü

$y(s)$: m bileşenli kapalı-döngü dizge çıkış vektörü

$K(s)$: 1xm denetleç geçiş matrisi

$G(s)$: kx1 dizge geçiş matrisi

L : mxk çıkış birleştirme matrisi

$H(s)$: mxm geri besleme öğeleri geçiş matrisi

Dizgenin açık-döngü geçiş matrisi

$$Q(s) = LG(s)K(s), \quad (D)$$

ve kapalı döngü geçiş matrisi

$$R(s) = [I_m + Q(s)H(s)]^{-1} \quad (2)$$

olarak tanımlanır. (2) eşitliğinde I_m , mxm birim matrisi göstermektedir. Aynı eşitlikte

$$T(s) = Q(s)H(s) \quad (3)$$

ve

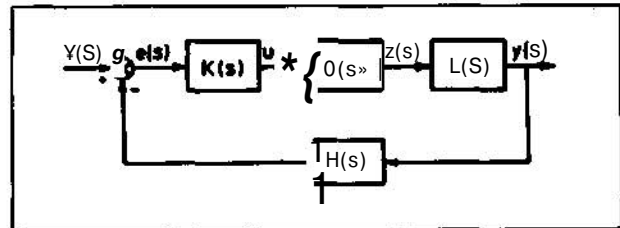
$$F(s) = I_m + Q(s)H(s) = I_m + T(s) \quad (4)$$

matrisleri sırasıyla, dönüş-oran matrisi ve dönüş-fark matrisi olarak bilinirler [15]. Bu matrisler Bode tarafından tek döngülü dizgeler için tanımlanan tek boyutlu işlevlerin genelleştirilmeleridir.

Yukarıda tanımlanan matrisler, Şekil 1'deki dizgenin tasarımında gerekli olan bütün bilgiyi içerirler. Bu matrislerin tasarımında nasıl kullanıldıkları, bundan sonraki bölümlerde açıklanacaktır. Şimdi, tasarımda üzerinde durulan ana sorunları inceleyelim.

Tasarımın amacı, uygun denetleç, geri besleme ve çıkış birleştirme matrisleri seçerek, giriş-çıkış bağıntısı $G(s)$ geçiş matrisiyle belirlenmiş olan dizgeyi istenilen şekilde denetleyebilmek; başka bir deyişle, çıkış değişkenlerinin giriş değişkenlerini yakından izlemesini sağlamaktır. Bu seçimi yaparken gözönünde bulundurulması gereken dört ana sorun vardır:

1. Kararlılık (stability),
2. Tümlüklük (integrity),
3. Etkileşme (interaction),
4. Performans.



Şekil 1. Çok döngülü doğrusal denetim dizgesi

6. teknik kongre

Kararlılık, kısaca, giriş değişkenlerindeki sınırlı değişmelerin, dizgenin hiçbir değişkeninde sınırsız değişmelere yol açmaması koşulu olarak tanımlanır. Bu tanımdan anlaşılacağı gibi, kararlılık, tasarımda üzerinde durulması gereken en önemli sorundur.

Genel olarak tümleşiklik, dizgenin bazı öğelerinin olağan çalışma koşulları dışına çıkmasının kararlılık üzerindeki etkilerinin incelenmesi sorunudur. Bu genel anlamıyla tümleşiklik, tasarımdan ayrı olarak düşünülmesi gereken başlıbaşına bir sorundur. İnceleyeceğimiz tasarım yöntemlerinde ise, tümleşiklik daha dar bir anlamda, öğelerin kazanç (gain) değerlerinin tasarımlanan değerlerden sifıra düşmesinin kararlılığa etkisi olarak ele alınmıştır.

Burada belirtilmesi gereken önemli bir nokta, tümleşiklik sorununun yalnız çok döngülü dizgelere özgü olduğudur.

Döngüler arası etkileşme, çok döngülü dizgelerin tasarımında karşılaşılan güçlüklerin tek nedeni değildir. Dizgenin kararlılığını ve tümleşikliğini olumsuz yönde etkilediği gibi, döngülerin birbirinden bağımsız olarak denetlenmesini de önler. Bu nedenle, döngüler arası etkileşmenin en az düzeye indirilmesi, tasarımın ana amaçlarından biridir.

Tasarımda, dizgenin sağlaması gereken özelliklere ne düzeyde uyulduğu, performans sorununu oluşturur. Çeşitli dizgelerde farklılıklar gösteren bu özellikler arasında tepke hızı, kalıcı-durum yanlışlığı, en fazla aşma vb. sayılabilir.

Yukardaki açıklamalardan anlaşılacağı gibi, bu sorunlar ayrı ayrı inelenebilirlerse de, birbirleriyle yakından ilişkilidirler. Başka bir deyişle, sorunlardan birinin çözümüne doğru atılacak bir adım, ötekilerinin de yeni boyutlar kazanmasına neden olur. Bu nedenle, çok döngülü bir dizgenin tasarımında, bütün bu sorunların bir arada düşünülmesi ve aralarında bir uzlaşmaya varılması gerekir. Evrik Nyquist sıra ve irasal yereğrileri, tu amaca yönelik birer tasarım yöntemidir.

3. EVRİK NYQUIST SIRA YÖNTEMİ

Rosenbrock tarafından geliştirilmiş olan evrik Nyquist sıra tasarım yöntemi [10] tek döngülü dizgelerin tasarımında kullanılan Nyquist kuramının çok döngülü dizgelere genelleştirilmesidir. Özünde çok yalın olmasına karşılık, pekçok dizgenin tasarımında başarıyla uygulanmış güçlü bir yöntemdir. Yöntemin ana amacı, döngüler arası etkileşmeyi uygun bir düzeye indirerek, tek döngü denetim tekniklerinin döngülere bağımsız olarak uygulanabilmesini sağlamaktır. Yönteme temel oluşturan teoremler ve yöntemin tasarımda nasıl kullanıldığı, bundan önceki bölümde sözü edilen sorunlar sırayla ele alınarak incelenecektir. Teoremlerin kanıtları birçok yazıda [10,14] bulunduğundan burada ayrıca verilmeyecektir.

3.1. Temel Bağıntı

Ters Nyquist sıra yönteminin başlangıç noktası (2) bağıntısıdır. Açık-döngü geçiş matrisi $Q(s)$ 'nin belirteninin (determinantının) sifırdan farklı olduğu varsayılırsa, bu bağıntı

$$\hat{R}(s) = \hat{Q}(s) + H(s) \quad (5)$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitlikte

$$\hat{R}(s) = R^{-1}(s) = [\hat{r}_{ij}(s)]$$

ve

$$\hat{Q}(s) = Q^{-1}(s) = [\hat{q}_{ij}(s)]$$

gösterilişleri, $R^{-1}(s)$ ve (TMs) matrislerinin öğelerinin kolaylıkla belirlenebilmeleri için kullanılmışlardır. (2) ve (5) eşitliklerinden yararlanarak, dönüş-fark matrisi

$$F(s) = Q(s) \hat{R}(s) \quad (6)$$

biçiminde yazılabilir.

4.2. Kararlılık

Şekil 1'deki kapalı-döngü dizgenin kararlılığı için gerek ve yeter koşulun, kapalı-döngü özçokterimlisinin (characteristic polynomial) karmaşık düzlemin (s -düzlemi) sağ yarısında sifırının bulunmaması olduğu bilinmektedir [16]. Hsu ve Chen [17], kapalı-döngü özçokterimlisi (KDÖ) ve açık-döngü özçokterimlisi (ADÖ) arasında

$$1 \ll \cdot \gg 1-3 \quad (7)$$

bağıntısının varlığını göstermişlerdir. Bu bağıntı, (6) eşitliğini kullanarak

$$\frac{\hat{R}(s)}{|\hat{Q}(s)|} = \text{KDÖ} \quad (8)$$

biçiminde yazılabilir. (8) eşitliğine çevreleme teoremi uygulandığında, çizimsel bir kararlılık ölçütü elde edilir.

D , karmaşık düzlemde bilinen Nyquist yarı çemberini f_{vef} , D nin $|S(s)|$ ve $|Q(s)|$ işlevleri altında dönüşümlerini gösterebilir. T_R ve T_Q nun sifır noktasını D yönünde net çevreleme sayıları f_R ve S_Q ; KDÖ ve ADÖ nin D yarı çemberi içinde kalan sifır sayıları p_R ve p_Q ise, çevreleme teoreminden

$$\hat{N}_R - \hat{N}_Q = p_R - p_Q \quad (9)$$

bağıntısı elde edilir. Kapalı-döngü dizgenin kararlılığı için $p_R = 0$ olması gerektiğinden aşağıdaki kararlılık teoremine ulaşılmış olur.

6. teknik kongre

Kararlılık Teoremi 1.
Kapalı-döngü dizgenin kararlılığı için gerek ve yeter koşul

$$N_{\hat{R}} - N_{\hat{Q}} = n_p \quad (10)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Açıkça gözlenebileceği gibi, kararlılık teoremi, verilen bir kapalı-döngü dizgenin kararlı olup olmadığını belirlemesine karşın, bir açık-döngü dizgenin kararlı kalmasını da sağlamak üzere öteki sorunların çözümü için nasıl bir denetleç tasarlanması konusunda yol gösterici değildir. Rosenbrock, R ve Q matrislerinin özel bir biçimde olmaları koşuluyla, teoremi tasarıma yönelik bir duruma getirmiştir.

4.2.1. Köşegen baskınlık

Bir $m \times m$ $\hat{Q}(s)$ matrisinin öğeleri $\hat{q}_{ij}(s)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, ile gösterilmiş ve

$$d_1(s) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{q}_{ij}(s)|,$$

$$d_i(s) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |\hat{q}_{ij}(s)|,$$

olarak tanımlanmış olsun. D yarı çemberi üstündeki her s değeri için

$$|\hat{q}_{ii}(s)| > d_1(s) \quad [d_i^*(s)], \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (11)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $\hat{Q}(s)$ matrisi, D üzerinde dizek (row) [dikeç (column)] köşegen baskındır denir.

Köşegen baskınlık (diagonal dominance) çizimsel olarak kolayca incelenebilir: D üstündeki her s değeri için merkezi $\hat{Q}(s)$ noktasında, yarıçapı $d_1(s)$ olan bir çember çizilecek olursa, bu çemberler karmaşık düzlemde bir bant oluştururlar (Şekil 2). Her i değeri için bu şekilde oluşturulan bantlardan hiçbirinin sıfır noktasını kapsamaması durumunda (11) eşitsizliği sağlanmış olur; bu da $\hat{Q}(s)$ matrisinin dizek köşegen baskın olduğunu gösterir. Dikeç köşegen baskınlık benzer biçimde, $d_1(s)$ yerine $d_i^*(s)$ kullanılarak incelenebilir. Bu bantlar Gershgorin bantları olarak adlandırılırlar.

4.2.2. Rosenbrock'un kararlılık teoremi

$\hat{Q}(s)$ ve $\hat{R}(s)$ matrislerinin köşegen baskın olmaları durumunda, f_r ve f_0 yerine, $\hat{R}(s)$ ve $\hat{Q}(s)$ 'nin köşegen öğeleri üzerine çizilen Gershgorin bantları kullanılarak, kararlılık teoremi daha kolay uygulanabilir bir duruma getirilebilir.

$\hat{Q}(s)$ köşegen baskın bir matris ve $f_i^{\wedge}, i=1, 2, \dots, m$, D nin $\hat{Q}(s)$ altında dönüşünü olsun. $\hat{R}(s)$ 'nin sıfır noktasını D yönünde çevreleme sayısı n_{q_i} ise,

$$\sum_{i=1}^m n_{q_i} \quad (12)$$

bağıntısının sağlandığı Rosenbrock tarafından gösterilmiştir. Bu sonuçtan yararlanılarak, kararlılık teoremi aşağıdaki biçimde verilebilir:

Kararlılık Teoremi 2:

$\hat{R}(s)$ ve $\hat{Q}(s)$ köşegen baskın matrisler ise, kapalı-döngü dizgenin kararlılığı için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m |r_{ij}| \right] < \sum_{i=1}^m |q_{ii}| \quad (13)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Geri besleme öğeleri geçiş matrisinin köşegen, değişmez bir matris olması durumunda, (13) bağıntısı çizimsel olarak kolaylıkla incelenebilir. (5) bağıntısında

$$H(s) = H = \text{koşutu} \quad (14)$$

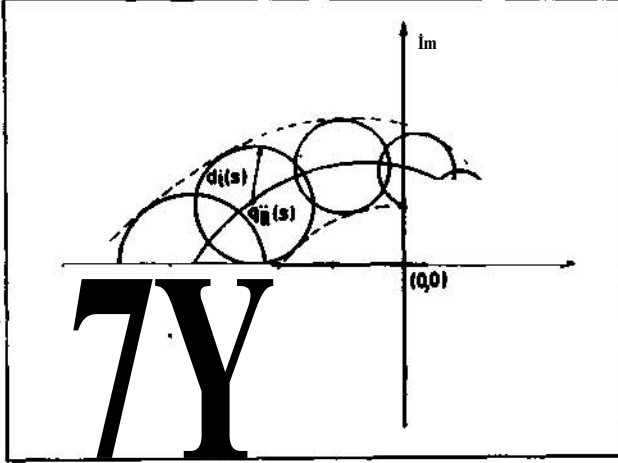
kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \hat{r}_{ii}(s) &= \hat{q}_{ii}(s) + h_i, \\ \hat{r}_{ij}(s) &= \hat{q}_{ij}(s), \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (15)$$

elde edilir. Bu durumda, $\hat{Q}(s)$ ler üzerine çizilen Gershgorin bantları, hem $\hat{Q}(s)$ ve $\hat{R}(s)$ 'nin köşegen baskınlığının incelenmesinde; hem de $\hat{Q}(s)$ ve $\hat{R}(s)$ 'nin köşegen baskın olması durumunda dizgenin kararlılığını sağlayan h değerlerinin seçiminde kullanılabilir. Şekil 2'de gösterildiği gibi, bantların (0,0) ve (h_i , 0) noktalarını kapsamaması $\hat{Q}(s)$ ve $\hat{R}(s)$ 'nin köşegen baskın olduğunu gösterir. Ayrıca (i) yinci bantın ($-h_i$, 0) noktasını çevreleme sayısı n_{ij} 'ye eşittir. Dolayısıyla, Gershgorin bantları çizildikten sonra, h_i değerleri (13) bağıntısı sağlanacak biçimde seçilebilir. Bu şekilde seçilen kazanç değerleri, kazanç uzayında bir kararlılık bölgesi belirlerler.

4.3. Tümlenirlik

üçüncü bölümde verilen tanımıyla tümlenirlik, Şekil 1'de görülen kapalı-döngü dizgenin döngülerinin değişik yerlerden açılmaları durumunda kararlılığın incelenmesi sorunudur. Döngü açılması, geri besleme öğelerinin, karşılıştırma öğelerinin, ya da uyarıların kazanç değerlerinin sıfıra inmesi olarak düşünülebilir.



Şekil 2. Gershgorin bandı

Geri besleme ögelerinden bir ya da birkaçının kazanç değerinin sıfıra inmesi, bu ögelere karşı gelen hf değerlerinin sıfıra eşitlenmesiyle gerçekleştirilir. Bu durumda ortaya çıkan dizgenin kararlılığı, normal çalışma koşullarında kararlılığı belirlemekte kullanılan Gershgorinbantlarından yararlanılarak kolayca incelenebilir, öte yandan Gershgorin bantları, döngülerin başka yerlerden açılmaları durumunda tiimleşikliğinin belirlenmesinde kullanılamayacakları gibi, yöntem bu tür açılmalarda tiimleşikliğinin belirlenmesi için başka bir yol da vermemektedir.

4.4. Etkileşme

Evrik Nyquist sıra tasarım yönteminin uygulamada en çok kullanılan bir özelliği de, kararlılığın belirlenmesinde kullanılan Gershgorin bantlarının aynı zamanda döngüler arası etkileşmenin bir ölçüsü olarak değerlendirilebilmeleridir.

$H(s) = H = köş. [h_{ii}]$, ve $\hat{R}(s) = \hat{Q}(s) + H$, D üzerinde dizek [dikeç] köşegen baskın bir matris olsun. $\hat{R}(s)$ matrisine Ostrovski teoremi [12] uygulandığında D üzerindeki her s değeri için

$$|r_{ii}^{-1}(s) - h_{ii} - q_{ii}(s)| < \phi_i(s) d_i(s) [\phi_i'(s) d_i'(s)], \quad i=1, \dots, m, \quad (16)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte,

$$(\text{>}) (8) = \text{büy} \sum_{j \neq i} \frac{d_j(s)}{|h_{jj} + q_{jj}(s)|} < 1, \quad (17)$$

$$\left[\phi_i'(s) = \text{büy} \frac{d_j'(s)}{|h_{jj} + q_{jj}(s)|} < 1 \right]$$

ve $r_j^{\wedge}(Cs)$, $R(s)$ matrisinin (i)yinci köşegen ögesidir. $R(s)$ matrisi üzerinde yapılacak yalın işlemlerle gösterilebileceği gibi, $r_{ii}^{\wedge}(s) - b.f = r_{ii}^{\wedge}(s)$ (i)yinci geri besleme döngüsü açık ve ötekiler kapalı olmak üzere, (i)yinci çıkışı (i)yinci girişe bağlayan geçiş işlevinin evriğidir. (16) ve (17) eşitsizlikleri, $r_{ii}^{\wedge}(s) H_n \hat{Q}(s)$ üzerine çizilen Gershgorin bantlarının içinde kalan daha dar bir bant içinde bulunduğunu gösterir. Ostrovski bantı [10,19J adıyla bilinen bu bant, öteki döngülerin kazanç değerleri kararlılık bölgesi içinde değiştirildiğinde, kendisine karşı gelen Gershgorin bantı içinde yer değiştirir. Dolayısıyla, (i)yinci Gershgorin bantının yeteri kadar dar olması, öteki döngülerin kazanç değerlerindeki değişmelerin $r_{ii}^{\wedge}(s)$ üzerinde önemsiz değişmelere yol açacağını; bütün Gershgorin bantlarının yeteri kadar dar olması da, döngüler arası etkileşmenin düşük bir düzeyde olduğunu gösterir.

Burada belirtilmesi gereken önemli bir nokta, bantların dar olmasının az etkileşme için yeterli bir koşul olduğu, bantların geniş olması durumunda ise etkileşmenin fazla olduğunun söylenemeyeceğidir.

4.5. Performans

Kararlılık ve geri besleme döngülerinin açılması durumunda tümleşiklik sorunlarının çözülmesi ve etkileşmenin uygun bir düzeye indirilmesinden sonra, evrik Nyquist sıra tasarım yöntemi, istenilen performansın sağlanması için gerekli tek-döngü denetleçlerin tasarımıyla indirgenmiştir. Tek-döngü denetleçlerin tasarımında da daha önce elde edilen Gershgorin bantları kullanılır. Tasarı» bu noktaya gelinceye kadar Gershgorin bantları etkileşmenin azaltılması amacıyla yeterince daraltılmış olduğundan, bu bantlar karşılıklı giriş ve çıkışlar arasındaki geçiş işlevlerinin evriklerinin yerlerini yaklaşıklıkla belirlerler. Bu durumda her döngünün kazanç ve evre boşluğu yaklaşıklıkla belirlenebilir ve uygun denetleçler tasarımılanabilir.

4.6. Özet ve Eleştiri

Buraya kadar verilen bilgilerin ışığında evrik Nyquist sıra tekniğinin tasarımda izlediği yöntem aşağıdaki adımlarla özetlenebilir:

1. Verilen bir $G(s)$ için $\hat{G}(s)$ matrisini ve $ADÖ$ nin sağ yarı düzlemdeki sıfır sayısını (p_s) bul.
2. Uygun ön-denetleç ($\hat{K}(s)$; ve değişmez çıkış birleştirme (\hat{f}) matrisleri seçerek $\hat{Q}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)\hat{f}$ matrisini köşegen baskın durumuna getir. $\hat{Q}(s)$ matrisi için Gershgorin bantlarını çiz.
3. Gershgorin bantlarını ve p_s yi kullanarak, kapalı-döngü dizgenin kararlılığını sağlayan kazanç değerlerini bul ve kazanç uzayında kararlılık bölgesini belirle.

6. teknik kongre

4. Gershgorin bantları yeterince darsa, 5'inci adıma geç; değilse, uygun bir denetleç tasarımıyla ve 3'üncü adıma dön.

5. Gershgorin bantlarını kullanarak her döngü için yaklaşık kazanç ve evre boşluklarını belirle, yeterli değilse uygun tek-döngü denetleçler tasarımıyla ve 3'üncü adıma dön.

6. Kararlılık bölgesinde uygun kazanç değerleri seç ve kapalı-döngü dizgenin çıkış tepkelerini gözle. Tepke özellikleri tasarım belirtimlerine uygunsa, dur. Değilse, Gershgorin bantlarından yararlanarak uygun tek-döngü denetleçler tasarımıyla ve 3'üncü adıma dön.

Görüldüğü gibi, evrik Nyquist sıra tasarım yöntemi, sorunların sırayla çözüme bağlandığı devrimsel bir yöntemdir. Her devirde, dizgenin son durumunun incelendiği bir çözümleme evresi, ve bu çözümleme sonuçlarına göre bir denetlecin tasarımıyla bir tasarım evresi bulunmaktadır. Yöntemin bu devrimsel yapısı, istenilen özelliklere yalın denetleçlerle ulaşılmasını sağladığı gibi, tasarımcıya tasarımın her devrinde yeterince özgürlük vermektedir.

Evrik Nyquist sıra tasarım yönteminin kısıtlamaları ya da uygulamadaki yetersizliklerini de şöyle özetleyebiliriz. Yöntemin uygulanması her şeyden önce dizge geçiş matrisinin köşegen baskın bir duruma getirilmesini gerektirmektedir. Belletrutti [11] tarafından örneklerle açıklandığı gibi, bu koşul tasarım için her zaman gerekli olmayabilir. Böyle bir durumda, tasarıma gerekenden çok fazla emek verilmiş olacağı gibi, gerekenden daha karmaşık bir denetleç tasarımıyla olmaktadır. Ayrıca bazı durumlarda, Gershgorin (Ostrovski) bantlarından elde edilen kararlılık bölgesi, geçtekinden çok daha dar olabilmekte; bu da seçilecek kazanç değerleri üzerine gereksiz bir kısıtlama getirmektedir. Yöntemin önemli bir eksikliği de yalnız geri besleme döngülerinin açılması durumunda dizge tümleşikliğini belirleyebilmesi, öteki türde açılmaların sonuçlarını inceleme olanğından yoksun olmasıdır.

5. IRASAL YEREĞRİLERİ TASARIM YÖNTEMİ Belletrutti ve MacFarlane [12] tarafından geliştirilmiş olan ırasal yereğrileri yöntemi, kapalı-döngü dizge özelliklerinin dönüş-oran ve dönüş-fark matrisleri aracılığıyla incelenip, gerekli denetleçlerin tasarımıyla bir yöntemdir. Bu bölümde, ırasal yereğrileri yöntemi, tasarım sorunları sırasıyla ele alınarak incelenecek, daha önce olduğu gibi teoremlerin kanıtları verilmeyecektir.

5.1. Kararlılık

ırasal yereğrileri yönteminde kararlılık teoremi, çevreleme teoreminin doğrudan (7) eşitliğine uygulanmasıyla elde edilir.

D yarı çemberinin $|F(s)|$ işlevi altında imgesi F_F ; F_F nin sıfır noktasını D yönünde çevreleme sayısı N_F ile gösterilirse, (7) eşitliğinden

$$N_F = P_k - P_a \quad (18)$$

bulunur. Dolayısıyla, kararlılık gerek ve yeter koşulu,

$$N_F = -P_a \quad (19)$$

bağıntısıyla verilir.

Kararlılık teoremi daha kolay uygulanabilir biçimde $F(s)$ matrisinin ırasal işlevleri [11,15] türünden verilebilir. $F(s)$ nin ırasal işlevleri $P_j(s)$, $j = 1, 2, \dots, m$, D nin $P_j(s)$ altında imgesi Tf^j , Tf^j nin sıfır noktasını D yönünde çevreleme sayısı da n_{fi} ile gösterilsin.

$$|F(s)| = \prod_{i=1}^m P_i(s)$$

bağıntısından

$$N_F = \sum_{i=1}^m n_{fi} - P_a \quad (20)$$

eşitliği elde edilir. (20) eşitliği, (19) da kullanılırsa, kararlılık gerek ve yeter koşulu olarak

$$\sum_{i=1}^m n_{fi} = T^j a \quad (21)$$

bağıntısı bulunur.

Dönüş-fark matrisi yerine dönüş-oran matrisinin ırasal işlevleri kullanılarak benzer bir sonuç elde edilebilir. $T(s)$ nin ırasal işlevleri $T^j(s)$, $j = 1, 2, \dots, m$ ile gösterilirse (4) bağıntısından

$$P_F(s) = 1 + \tau_j(s), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (22)$$

olduğu görülür. $T(s)$ nin ırasal yereğrileri $(?_i)$ $(-1, 0)$ noktasını D yönünde n_{fi} kadar çevrelense, (22) eşitliğinden $n_{fi} = n_{fi}$ elde edilir. Bu durumda kararlılık teoremi aşağıdaki biçimde verilebilir.

Kararlılık Teoremi:

Kapalı döngü dizgenin kararlılığı için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{i=1}^m n_{fi} = -P_a \quad (23)$$

bağıntısının sağlanmasıdır.

Kararlılık teoreminin (19) ya da (21) bağıntıları yerine (23) bağıntısıyla verilmesi, kazanç değer-

6. teknik kongre

lerinin seçiminde yol gösterici olduğundan uygulamada daha yararlıdır. Bütün çevrelerdeki kazanç değerleri eşit olarak k çarpanı kadar değiştirilirse, $T(s)$ matrisinin bütün ırsal işlevleri de aynı çarpan kadar değişir. Bu durumda kararlılık koşulu, n_i , r_f nin $(-j, 0)$ noktasını çevreleme sayısı olarak değiştirilmek üzere, yine (23) bağıntısıyla verilir. Böylece, (23) bağıntısı, dizgenin kararlılığıyla birlikte, döngülere uygulanabilecek en fazla eşit kazanç değerlerinin de belirlenmesini sağlar.

5.2. Tümüleşiklik

ırsal yereğrileri yönteminin uygulamada en çok yararlanılan yönü, her tür döngü açılması durumunda dizgenin kararlılığını belirleyen bir tümleşiklik teoremi vermiş olmasıdır.

Döngülerin değişik noktalardan açılması durumu, kapalı döngü dizgesinde uygun yerlere, Şekil 3'de görüldüğü gibi bir S anahtar matrisi eklenerek gösterilebilir. 9 matrisi, normal çalışan döngülere karşı gelen öğeleri 1 , açılan döngülere karşı gelen öğeleri 0 olan köşegen bir matristir. Şekil 3'deki dizgeler, Şekil 4'de gösterilen eşdeğer dizgelere dönüştürülürse, bu dizgelerin dönüş oran matrisleri sırayla

$$\begin{aligned} T'_y(s) &= LG(s)K(s)H(s)S, & T'_y(s) &= T_y(s) S \\ T'_e(s) &= H(s)LG(s)K(s)S, & T'_e(s) &= T_e(s) S \\ T'_u(s) &= K(s)H(s)LG(s) S = T_u(s) S \end{aligned} \quad (24)$$

olarak yazılabilir. (24) bağıntılarında $T_v(s)$, $T_e(s)$ ve $T(s)$ Şekil 1'deki dizgenin normal çalışma koşullarında $y(s)$, $e(s)$ ve $u(s)$ değişkenlerine karşı gelen dönüş-oran matrislerini göstermektedir. (24) bağıntıları genel olarak

$$T'(s) = T(s) S \quad (25)$$

ile gösterilmiş olsun. (25) eşitliğinden, $T'(s)$ 'nin açılan döngü sayısı kadar ırsal işlevinin sıfıra özdeş, kalanlarının da $T(s)$ 'nin S matrisiyle seçilen altmatrisinin ırsal işlevlerine eşit olduğu görülmektedir. Sıfıra özdeş olan ırsal işlevlerin (23) bağıntısındaki çevreleme sayılarına etkileri olmadığından, aşağıdaki tümleşiklik teoremine ulaşılmış olur.

Tümüleşiklik Teoremi:

Kapalı-döngü dizgenin döngülerinden bir ya da daha fazlasının aynı noktada açılmaları durumunda ortaya çıkan dizgenin kararlılığı için gerek ve yeter koşul, açılma noktasına karşı gelen dönüş-oran matrisinin açılan çevreleri belirleyen anahtar matrisiyle seçilen altmatrisinin ırsal

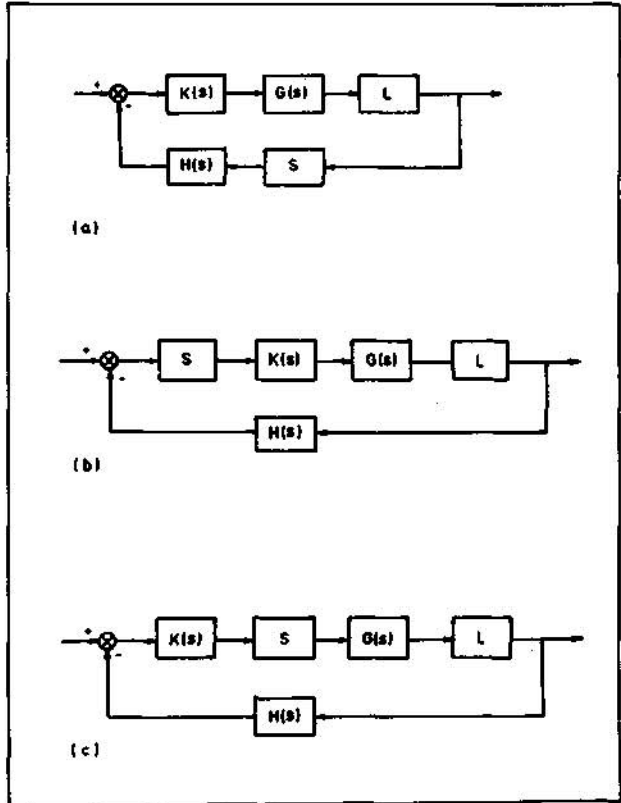
işlevlerinin (23) bağıntısını sağlamasıdır.

Tümüleşiklik teoremi, özellikle iki değişkenli dizgelerde çok kolaylıkla uygulanabilir. Böyle bir dizgede döngülerden birinin açılması durumunda tümleşiklik, (23) bağıntısının dönüş-oran matrisinin öteki döngüye karşı gelen öğesine uygulanmasıyla kolaylıkla belirlenir. Uygulamada bir diğer kolaylık da, $H(s) = I_m$ alınması durumunda $T_y(s)$ ve $T_e(s)$ eşit olacağından, bu matrislerin belirlediği açılma durumlarında tümleşikliğin aynı anda incelenebilmesidir.

5.3. Etkileşme

Bu bölümde, döngüler arası etkileşmenin belirlenmesinde dönüş-oran matrisinin ırsal işlevlerinin ve ırsal vektörlerinin [11,15] kullanılışları incelenecektir.

$T(s)$ matrisinin ırsal işlevlerinin ($TF(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$) farklı oldukları varsayılır ve bunlara eşlik eden ırsal vektörler bir $W(s)$ matrisinin dikeçleri olarak toplanırsa



Şekil 3. Açılma durumlarında S matrisinin konumu
(a) Geri besleme döngüleri açılmaları
(b) Karşılaştırmacı açılmaları
(c) Uyargaç açılmaları

6. teknik kongre

$$VT^1(s)T(s)W(s) = \text{köş}[Ti(s)] = A_r(s)$$

ya da

$$T(s) = W(s) A_r(s) W^{-1}(s) \quad (26)$$

eşitliği elde edilir. (26) eşitliği, (2)de kullanılırsa

$$R(s) = W(s) [1_m + A^s]^{-1} A_r(s) W^{-1}(s) H^{-1}(s) \quad (27)$$

eşitliği bulunur.

Belirli bir frekans bölgesinde T(s)nin bütün irasal işlevlerinin büyüklükçe 1 den çok büyük oldukları varsayılırsa, bu frekans bölgesinde (27) eşitliği

$$R(j\omega) * H^{-1}(j\omega) \quad (28)$$

yaklaşıklığına dönüşür. Bu yaklaşıklık, H(s)nin köşegen bir matris seçilmesi durumunda, T(s)nin irasal işlevlerinin büyük olduğu frekanslarda et-

kileşmenin az olacağını gösterir. Bu koşul, düşük frekanslarda yüksek kazanç değerleri seçerek ya da OT (oransal ve tümlevsel, proportional+ integral)denetleç kullanılarak sağlanabilir. Yüksek frekanslarda ise (23) bağıntısının sağlanabilmesi için T(s)nin irasal işlevlerinin yeteri kadar küçük olmaları gerekmektedir. Dolayısıyla, (28) yaklaşıklığı yüksek frekanslarda geçerli değildir ve etkileşmenin belirlenmesinde başka bir yaklaşımdan yararlanılır.

Yüksek frekanslarda

$$W(j\omega) * I_m \quad (29)$$

olduğu varsayılırsa, (27) eşitliği

$$R(j\omega) = [1_m + A_r(j\omega)]^{-1} A_r(j\omega) H^{-1}(j\omega) \quad (30)$$

yaklaşıklığına dönüşür. Bu yaklaşıklık, H(s)nin köşegen bir matris seçilmesi durumunda, R(j\omega)nin yaklaşıklıkla köşegen bir matris, dolayısıyla etkileşmenin az olacağını gösterir. (29) yaklaşıklığı, T(s)nin irasal vektörleriyle standart birim vektörler arasındaki açılarının yeterince küçük olmaları durumunda sağlanır [il].

5.4. Performans

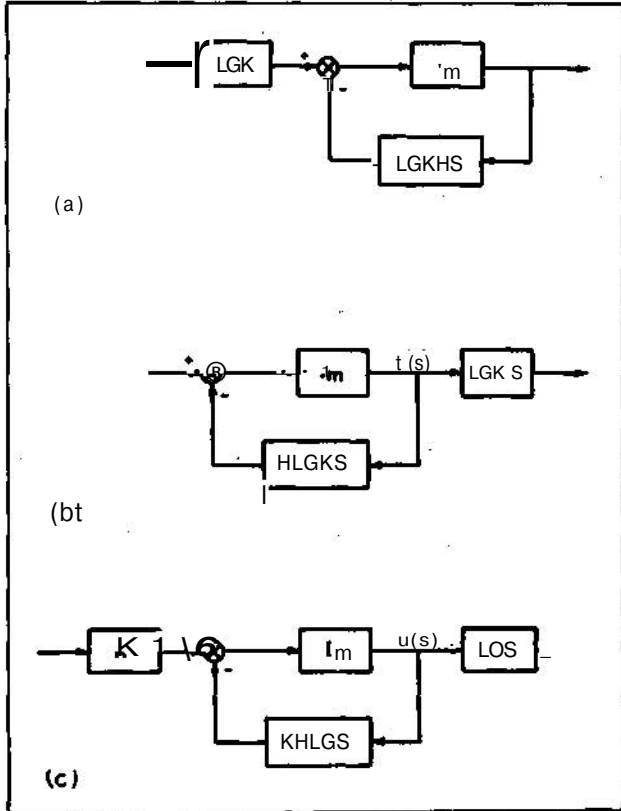
(28) yaklaşıklığından görüldüğü gibi, H(s) = I seçilir ve yeteri kadar yüksek kazanç değerleri ya da OT denetleç kullanılırsa, düşük frekanslarda yeterli bir denetim sağlanmış olur. T(s)nin irasal işlevlerinin küçük olduğu yüksek frekanslarda ise (27) eşitliği

$$R(j\omega) * T(j\omega)H^{-1}(j\omega) = Q(j\omega)$$

yaklaşıklığı olarak yazılabileceğinden, bu frekans bölgesinde yeterli bir denetime ulaşmak için açık-döngü geçiş matrisinin uygun bir biçimde düzeltilmesi gerekir. Bu düzeltme için gerekli denetleçler, genellikle, çıkış tepkeleri gözlemlenirken sonra tasarlanırlar.

4.5. Eleştirisi

İrsal yereğrileri tasarım yönteminde ağırlık kararlılık ve tümleşiklik sorunları üzerindedir, Özellikle tümleşiklik teoremi, her türde açılma durumunda kararlılığı belirleyen güçlü bir yöntemdir. Buna karşılık, etkileşme ve performans sorunlarına daha az eğilmiştir. Etkileşmenin belirlenmesi için yeterli çözümlenme yöntemleri bulunmasına karşın, etkileşmenin fazla olması durumunda nasıl bir denetleç tasarlanması gerektiği açıkça belirtilmemiştir. Buna neden, yöntemin, dizgenin dış yapısı üzerine değil, doğrudan iç yapısını belirleyen irasal işlevler üzerine kurulmuş olması ve tasarımı yapılacak bir denetlecin dönüş-oran matrisinin irasal değerlerini nasıl



Şekil 4. Açılma durumlarında eşdeğer dizgeler
(a) Geri besleme döngüleri açılmaları
(b) Karşılaştırıcı açılmaları
(c) Uyarı açılmaları

6. teknik kongre

etkilediğinin ayrıntılı olarak bilinmemesidir.

Belirtilmesi gereken önemli bir nokta da, hem her tür döngü açılması durumunda kararlılığın sağlanması, hem de performans özelliklerine uyulması koşullarının, genellikle, aynı anda yerine getirilemeyeceğidir [il,12]. Bu durumda tasarımcı, hangi türde açılmalara ağırlık vereceğini saptamalı ve tasarımı buna uygun olarak yürütmelidir.

-6. SONUÇ

Çok döngülü doğrusal dizgelerin denetimine ilişkin ax» sorunlar belirtilmiştir. Denetimde çok kullanılan iki tasarım yöntemi, evrik Nyquist sıra ve ırsal yereğrileri yöntemleri, bu sorunların çözümlünde yararlandıkları çözümlene teknikleri verilerek incelenmiştir.

Evrik Nyquist sıra ve ırsal yereğrileri tasarım yöntemleri çeşitli örneklere uygulanmıştır [il, 20-22]. Bu uygulamalarda, yöntemlerin tasarımda karşılaştıkları zorluklar belirtilmiştir. Örneğin, evrik Nyquist sıra tasarım yönteminin, açık-döngü geçiş matrisini köşegen baskın duruma getirmeden hiçbir çözümlene tekniği uygulayamaması, ırsal yereğrileri yönteminin de denetleç seçimine yeterince açıklık getirmemiş olması bu zorlukların en önemlilerindedir. Bu açıdan bir bakış, bu iki yöntemin çözümlene tekniklerinin ortaklaşa kullanılabilirdiği bir yöntemin, denetim sorunlarının çözümüne kolaylıklar getireceğini göstermektedir. Bu sav, bu doğrultuda yapılan bir çalışmada iki örnekle doğrulanmıştır [22].

İncelenen tasarım yöntemleri, doğrusal olmayan dizgelere de genelleştirilmiştir [23,24].

KAYNAKLAR

- [1] Nyquist, H., Regeneration theory, Bell Syst. Tech.J., 11, s.126-147 (1932)
- [2] Bode, H.W., Network analysis and feedback amplifier design, Van Nostrand (1945)
- [3] Pontryagin, L.S., Boltyansky V.G., Gamkse-lidze, R.V., Mischenko Y.F., The mathematical theory of optimal processes, Interscience (1963)
- [4] Kalman, R.E., The theory of optimal control and the calculus of variations, mathematical optimization techniques, Univ. of California Press, Berkeley (1963)
- [5] Simon, J.D., Theory and application of modal control, System Research Centre Report, SEC 104-A-67-46, Case Institute of Technology (1967)
- [6] Simon, J.D. ve Mitter, S.K., A theory of modal control, Information and control, 13., s.316-353 (1968)
- [7] Rosenbrock, H.H., Distinctive problems of process control, Chem.Eng.Progress, 58-9, s.43-50 (1962)
- [8] Boksenbom, A.S. ve Hood, R., General algebraic method applied to control analysis of complex engine types, NCA-TR-980, N.A.C.A., Washington (1949)
- [9] MacFarlane, A.G.J., Commutative controllers; a new technique for the design of multivariable control systems, Elec. Lett., 6(5), s.121-123 (1970)
- [10] Rosenbrock, H.H., Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array, Proc.IEE, 116(11), s.1929-1936 (1969)
- [11] Beiletrutti, J.J., Theory and design of multivariable feedback systems, Ph.D. thesis, Control Systems Centre, UMIST (1972)
- [12] Beiletrutti, J.J. ve MacFarlane, A.G.J., Characteristic loci techniques in multivariable control system design, Proc.IEE, 118, s.1291-1297 (1971)
- [13] MacFarlane, A.G.J., Linear multivariable theory: a survey, IFAC Symposium on Multivariable Control Systems, Dusseldorf (1971)
- [14] Rosenbrock, H.H., Yakında basılacak bir kitap
- [15] MacFarlane, A.G.J., The return-difference and return-ratio matrices and their use in the analysis and design of multivariable feedback control systems, Proc.IEE, 117, s.2037-2049 (1970)
- [16] Chen, C.T., Stability of linear multivariable feedback systems, Proc.IEEE, 56(5), s.821-828 (1968)
- [n] Hsu, C.H. ve Chen, C.T., A proof of the stability of multivariable feedback systems, Proc.IEEE, 56, s.2061-2062 (1968)
- [18] Ostrovski, A.M., Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal, Proc. Am.Math.Soc, 3, s.26-30 (1952)
- [19] McMorran, P.D., Design of multivariable systems, Ph.D. thesis, Control Systems Centre, UMIST (1971)
- [20] McMorran, P.D., Design of gas-turbine controller using inverse Nyquist method, Proc. IEE, 117(10), s.2050-2056 (1970)
- [21] Elmaslı, I.A. ve Hüseyin, Ö., Stability and control of a power system using inverse Nyquist array design technique, IFAC Conference, Dusseldorf (1974)
- [22] Sezer, M.E., A design procedure for multivariable control systems and its applications, Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ U974)
- [23] Rosenbrock, H.H., Multivariable circle theorems, İMA, Conference on Recent Mathematical Developments in Control, Bath, İngiltere (1972)
- [24] Hüseyin, Ö., The Popov Criterion and the inverse Nyquist method., IJC, 18(6), s.1303-1312 (1973)