MATEMANTıK

Hazırlayan: M. Serhat ÖZYAR

Değerli Üyelerimiz,

Köşemize gösterdiğiniz ilgi geçtiğimiz aylarda rekor düzeye ulaştı ve beni daha güzel ve *bunaltıcı* matemantık soruları bulmaya zorladı. İlginizin hep böyle artarak sürmesini diliyor ve köşemize değerli katkılarınızı bekliyorum.

Bu ayın doğru çözüm gönderen matemantıkçıları bir hayli fazla. 21. sorumuza doğru çözüm gönderen matemantıkçılarımız Sayın Şerif ÇETİNDAĞ (Manisa), Sayın Kemâl AKSU (Samsun), · Sayın Serhat KAYA (Ceyhan/Adana), Sayın İrfan ÜNAL (Avcılar/İstanbul), Sayın Metin ASILKEFELİ (Bafra/Samsun) ve Sayın Nihat YÜKLÜ (Malatya). 22. sorumuza doğru çözüm gönderen matemantıkçılarımız ise Sayın Şerif ÇETİNDAĞ, Sayın M. Fuat AKBAŞ (Ankara), Sayın Mevlüt DURGAÇ (Erzurum), Sayın Ahmet ŞAFAK (Gaziantep), Sayın Kemal AKSU, Sayın Alaattin ALBAYRAK (Trabzon), Sayın Veli YALIN (Konya). Sayın .Serhat.KAYA, Sayın Suat KAŞ (Antalya), Sayın Metin ASILKEFELİ, Sayın Naim KAHRAMAN (Elazığ), Sayın Mehmet BAYRAM (Trabzon), Sayın Mehmet Selim ULUTAŞ (Gümüşhane), Sayın Aydemir ŞAMAN (Ankara) ve Sayın Alican AKPINAR (Adana).

Geçtiğimiz ayın sorularına *müstakbel* üyelerimizden de birçok doğru ve ilginç çözüm geldi. Genç matemantıkçılardan İzmir Fen Lisesi ikinci sınıf öğrencisi özgür ÖZYAR 21 ve 22. sorularımıza güzel çözümler göndermiş. 21. soruya önerdiği çözüm yolunu bu sayıda yayınlıyoruz. Yıldız Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü 4. "sınıf öğrencisi arkadaşımız Tülay ODABAŞI da 21. ve 22. sorularımıza doğru çözüm göndermiş. Ayrıca İTÜ Elektrik Mühendisliği Bölümü 4. sınıf öğrencisi arkadaşımız Adem ÇALIŞKAN'ın mektubundan da 21. ve 22. sorularımıza doğru çözümler çıktı. Yine aynı sınıftan, daha önceki sorularımıza doğru yanıt gönderen arkadaşımız Necati DEMİRKOL bu kez 20., 21. ve 22. sorularımıza doğru çözüm göndermiş, 21. ve 22. sorularımıza bir başka güzel çözüm Bilkent Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü 4. sınıf öğrencisi arkadaşımız Sülayman ŞAHİNALP'ten geldi. Süleyman arkadaşımızın 21. soru için önerdiği çözümü sizlerin de ilginç bulacağını umarak bu sayıda yayımlıyoruz. Yıldız Üniversitesi, Elektrik Mühendisliği (Akşam) Bölümü 2. sınıf öğrencisi arkadaşımız Mithat BAYRAM'ın 21. soru için gönderdiği çözümü, sorumuzu yanlış anladığı için ne yazık ki diğerlendirmeye alamadık.

Bizi hiç mektupsuz bırakmayan Sayın Mevlüt DURGAÇ'ın 16. sorumuz için önerdiği değişik çözümü bu sayımızda yayınlıyor ve matemantıkçıların tartışmasına sunuyoruz. Ayrıca Sayın Nihat YÜKLÜ'nün 21. sorunun çözümüne getirdiği *elektriksel* yorumu da ilginize sunuyoruz.

Köşemize mektup gönderen tüm üyelerimize teşekkür ediyor,, doğru çözüm gönderen matemantıkçılann armağan kitaplarımızı beğeniyle okuyacaklarını umuyoruz.

Yeni sorularımıza geçmeden, çözüm gönderen üyelerimizin -herhangi bir karışıklığı önlemek için- Oda sicil numaralarını mektuplarına *mutlaka* eklemelerini rica ediyoruz.

Soğuk kış günlerinde *içimizi ısıtacak* matemantık sorularında buluşmak ümidiyle, hoşçakalın.

Soru 25:

Bir K«z Daha Puan Cetveli Tamamlamaca

(EricEmmetj

4 futbol takımı birbirleriyle tek devreli lig usulü karşılaşacaklardır. Maçların bir kısmı oynandıktan sonra sonuçlarla ilgili bazı bilgiler aşağıdaki puan cetvelinde verilmiştir. Oynanmış olan maçları ve skorlarını bulunuz.

(Galibiyet 2 puan, beraberlik 1 puan, yenilgi 0 puan)

	O	G	B	M	A	Y	P
A	2	1			5	5	
B		0	1		3	5	
C	2					0	
D				2	5	12	1

Soru 26:

Bir Varmış Bir Yokmuş...

(Harry L. Nelson'dan uyarlama)

Ali Baba'nın eşkenar üçgen biçiminde bir çiftliği varmış ve bu çiftliğin içinde yüz yıllık bir çınar ağacı yaşarmış. Bu çınar ağacının çiftliğin köşelerine uzaklığı sırasıyla 57, 65 ve 73 adım tutarmış. Öte yandan, çiftliğin bir kenarının uzunluğu bir tamsayı kadar adım tutarmış ve bu adım uzaklığının son basamağı 2 imiş.

Gökten üç elma düşmüş ve bu elmalar çiftliğin bit kenarının kaç adım olduğunu bilenler arasında pay edilecekmiş.

Çözüm 21:

(Çözüme değişik yaklaşımlar, yorumlar)

(a) özgür Özyar

u sayısının istenilen koşulu sağlaması için yalnız Ve ve kendisine bölünebilmesi (yalnızca iki tane böleni olması) gerekir. Böylece, toplamları $\frac{1}{u}$ eden iki *ters ("recipro-ca/7* sayılarının paydaları eşitlenebilir.

$\frac{1}{u} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ifadesini $\frac{1}{u} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

biçiminde yazar ve paydaları eşitlersek

$\frac{a\ r\ J}{u.\ a} = \frac{1}{b}$ **olur. Buradan a - u + 1 ve u . a = b yazılabilir,**

u tamsayısının asal olduğu bildiğimize göre, her u'ya karşılık gelen a ve b tamsayıları kolayca bulunur.

a - b için ise a - 2u olur ki bu da $\frac{1}{u}$ 'yu iki tersin toplamı olarak ifade etmenin *ikinci* yoludur.

Sonuç olarak, çözüm kümesi

u - {2,3,5, 7,11, 13,17,19.......} biçiminde olur.

(b) Süleyman Şahlnalp

Herhangi bir $\frac{1}{u}$ kesirini, iki kesirin toplamı olarak

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a \cdot k} + \frac{1}{b \cdot l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Burada a. b = u'dur. Yukarıdaki denklem için k - 2. b ve l - 2. a değerleri k, l e Z* için bir çözüm çifti oluşturur. Amacımız (1.) no'lu denklemi sağlayacak (k, l) çözüm çiftlerini bulmaktır. (1). denklemdeki paydaları eşitlersek,

$\frac{1}{a \cdot b} = \frac{\cdot bl + ak}{a \cdot k \cdot b \cdot l}$ **olur. Buradan**

kl - bl + ak olarak çekilir ve $\frac{a \cdot k}{k \cdot b}$ - l **veya** $\frac{b \cdot l}{l \cdot a}$ - k

biçimine gelir.

Denklemi x = k ve y - l olacak şekilde kartezyen koordinat sistemine taşıyıp, çözümleri x, y e R* olacak biçimde gösteebiliriz. Grafikten de anlaşılacağı gibi x, y e R^+ için çözümler ancak y > a ve x > b için mevcuttur.

Sonuç olarak her $\frac{1}{u}$ sayıst bir ya da birden fazla (a,b) **çiftiyle** $\frac{1}{a.\ b}$ olarak gösterilebilir. Yani u asal ya da asal olmayan bir sayı olabilir. Önce asal sayılardaki çözümleri inceleyelim.

(i) Eğer u asal ise a = 1 ve b = u'dur. Grafikten görüldüğü gibi her x,e Z^+ için y = $\frac{a-x}{7-b}$ denkleminin çözümlerini aramak yerine önce b< x < 2.b için y e? 'nin sonra a < y < 2.a için *x e Z** 'nin çözümlerini ararsak bütün (x,y) e R^+ çiftlerin taramış oluruz.

1 < y < 2 için çözüm yoktur, öyleyse grafiğimizin sağında çözüm yoktur. (a = 1 olduğundan ötürü)

u < x < 2u için x = u +1 'in çözüm olacağı barizdir.

$y = \frac{x}{x-u} = u + 1$ eZ^+ olur fakat x = u +1 dışında bir çözüm olamaz. x = u + k olsun. Bu kez $\frac{u+k}{k}$ **'nin** tamsayı olması için $\frac{u}{k}$ 'nin tamsayı olması gerekir. Oysa u *asal* olduğundan bu olanaksızdır. Sonuçta u'nun asal olduğu her durumda $\frac{u}{k}$ 'yu sadece iki biçimde yazabiliriz.

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2 \cdot u} + \frac{1}{2u} = \frac{1}{u \cdot (u+1)} + \frac{1}{u+1}$$

(ii) Eğer u *asal değilse*

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2u} + \frac{1}{2u} = \frac{1}{u \cdot (u+1)} + \frac{1}{u+1}$$

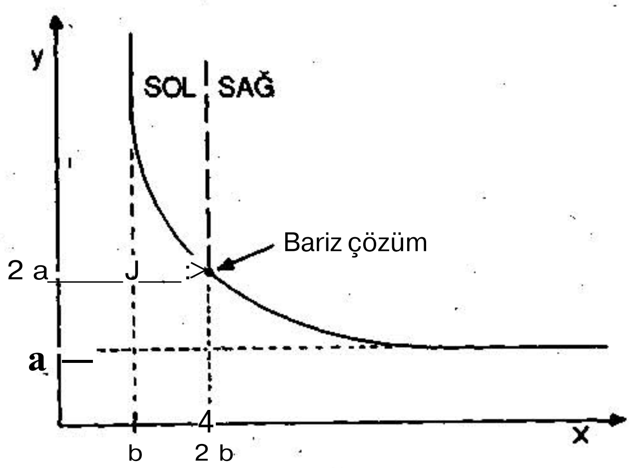
dışında çözümler vardır, (a, b) * (1, u) çiftleri için aynı yöntemle çözüm arayalım.

b<x<2- biçiny - $\frac{a \cdot x}{x-b}$ ⇒ b + 1 »x içiny = a - (b+1)

olur. öyleyse $\frac{1}{u} = \frac{1}{a \cdot (b+1)} + \frac{1}{a \cdot b \cdot (b+1)}$

ifadesi her (a, b)-çifti için karşımıza çıkar.

Sonuçta, *asal olmayan* tamsayıların oluşturduğu *ters'ler en az üç* şekilde gösterilirken, *asal sayıların oluşturduğu "ters'ler yalnızca iki şekilde* gösterilirler.



(c) Nihat Yüklü

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{u+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{u \cdot (u+1)} = \frac{1}{y}$$

dönüşümünü yaparsak, şu üç özellik göze çarpar:

1) $(z+1)^2 = (x+y)$

2) $[(y-x)+1] = z^2$

3) $\frac{1}{z} = \frac{x \cdot y}{x+y}$

Sonuncu özellik bize, x ve y paralel iki direncin değeri ise eşdeğer z direncinin değerinin hesaplanmasını anımsatıyor. Bu ifadeden anlaşıldığı gibi, sorunun çözüm kümesinde bulunan u değerlerindeki bir direnci, paralel iki direnç biçiminde ifade etmenin yalnız ve yalnız iki yolu vardır.

Çözüm 22:

	0	G	M	B	A	Y	P
A	2	0	1	1	4	5	1
B	2	0	1	1	3	6	1
C	1	1	0.	0.	12	3.	o
D	.2	2.	0.	0.	9	5	4
E	1	0	1	0.	3	12.	0

C-EM2-3
D-A:4-3
D-B:5-2
A-BM-1

Çözüm 16: (Mevlüt Drgaç)

$x^2 + a = (a+b)^2$

$x^2 - a = (a-b)^2$ olsun.

Bu ifadeler taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa $x^2 = a^2 + b^2$ ve $b = \frac{\alpha}{2a}$ değeri bulunur. $b = \frac{\alpha}{2a}$ değeri $x^2 = a^2 + b^2$ değerine konulursa

$$x = \frac{\sqrt{4a^4 + a^2}}{2a}$$ elde edilir.

Burada $a^2 = y + p$ kabul edilirse

$4(Y+P)^2 + a^2 - (A+B)^2$ olarak yazılabilir. Bu ifadede A ve B gibi iki yeni değişkene gereksinim duyulmasının nedeni *karmaşık* ("Complex") çıkabilecek x sayısını bulabilmek içindir. Bu ifadedeki kareli parantezleri açarsak

$$4\gamma^2 + 4\beta^2 + 8\gamma\beta + \alpha^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{.....................} \quad (1)$$

ifadesi elde edilir. Aynı kuvvetleri olan birimlerin karmaşık sayılar için eşit olacağını öngörürsek, (1) nolu denklemden

$$\left.\begin{array}{l} 4\gamma^2 = A^2 \Rightarrow A = -2\gamma \\ 4\beta^2 = B^2 \Rightarrow B = +2\beta \end{array}\right\} \quad \text{.......................} \quad (2)$$

eşitlikleri bulunur. (Kök işaretleri AB çarpımını negatif yapacak biçimde seçilmiştir).

Ayrıca (1). ifadeden

$8YP + a^2 = 2AB = -8YP$ ((2). ifadeden)

$\Rightarrow 16YP + \alpha^2 = 0$ denklemi elde edilir ki Y Va 9"re çözülürse

$$\gamma = -\frac{\alpha^2}{16b} \quad \text{.....................................} \quad (3)$$

elde edilir.

(3). ifade $a^2 = Y + P$ 'd© yerine konulursa

$$a^2 = \frac{-a^2 + 16p^2}{16\beta} \quad \text{.....................................} \quad (4)$$

bulunur. Bu ifade $x = \frac{\sqrt{4a^4 + \alpha^2}}{2a}$ 'dayeririe konulursa

$$x = \frac{\alpha^2 + 16P^2}{4\sqrt{\beta}\,(a - 16P)} \quad \text{.....................................} \quad (5)$$

elde edilir.

Tam kare olmak koşulunun sağlanması için, bu ifadenin pay ve paydasının tamsayı olması gerektiğinden, paydanın sıfırdan büyük olması gerekmektedir.

Böylece, a = 5 için

$P(25 - 16P^2) > 0$ olmalıdır.

Burada i) $p > 0$

ii) $25 - 16p^2 > 0 \Rightarrow P < 1.25$ olmalıdır.

Çözüm kümesi olarak 0 < J$ < 1.25 olmalıdır.

a = 5 özel durumu2İçin

$$x = \frac{25 + 16p^2}{4\sqrt{P(25-16P)}} \quad \text{olurve} \quad x^2 + a \quad \text{ve} \quad x^2 - a$$

ifadelerinin tam kare olmasını sağlayan yalnızca p = 1 değeri bulunur.

Buradan $x = \frac{41}{12}$ bulunur.