

basamaklı edilgin RLC devrelerinin çözümlemesinde yeni olanaklar

Enis TÜYENÎ
Yurdakul CEYHUN

UDK: 621. 3. 01

ÖZET

RLC elemanlarından oluşan basamaklı devrelerin belirtenlerinin (determinant) özelliklerine dayanan çözümleme yöntemleri incelenerek, elde edilen sonuçlarla yeni bir program geliştirilmiştir. Bu program, elektrik süzgeçlerinin (filtre) hesaplanmasında kolaylıklar sağlamaktadır. Ayrıca, aynı yöntemin duyarlık hesaplamasında da kolaylıkla kullanılabilceği gösterilmiştir.

SUMMARY

Methods of analysis which rely on- the properties of the determinants of ladder networks comprising RLC elements are investigated, and a new computer program is developed which makes use of the results of the above investigation. This program simplifies the design of filters, and it is shown that the method can also be used in sensitivity calculations.

1. GİRİŞ

Elektrik süzgeçlerinin (filtre) büyük bir kısmı basamaklı devreler biçimindedir. Öte yandan, basamaklı devrelerin dokusal (topolojik) özelliklerinden dolayı» bu tür devrelerin belirtenlerinin (determinant) bazı dikkate değer özellikleri vardır. Gerektiği biçimde kullanıldığında, bu özellikler belirli kolaylıklar sağlayacak özel yöntemlerin kullanılmasına olanak sağlar. Bu yazıda, bu tür devreler için geçerli olan böyle bir çözümleme yöntemi üzerinde durulmuştur. Ayrıca, bu yöntemin aynı kolaylıkla duyarlık çözümlemesinde de kullanılabilceği gösterilmiştir. Öncelikle LC- süzgeçlerinin hesaplanmasında kullanılmak amacı ile geliştirilen bir program anlatılmıştır.

*Enis Tüyenî, Marmara Araştırma Enstitüsü, Gebze, Kocaeli.
Yurdakul Ceyhun, Y.Prof .Dr., ODTÜ, Ankara.*

2. BASAMAKLI DEVRENİN ÇÖZÜMLENMESİ

Şekil 1 deki N ile adlandıracağımız basamaklı bir devreyi gözönüne alalım. Burada, $Z_±$ ya da $Y_±$ basit R , L , C elemanlarından oluşmuş iki uçlu alt-devrelerdir. Burada çevre ve kesitleme denklemlerini $[TO - IT]$,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ I_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{2n-1} \\ I_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_{2n-1} \\ v_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{E} \quad (D)$$

olarak yazabiliriz. Devreyi oluşturan elemanların uç denklemleri ise,

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ y_2 \\ \vdots \\ z_3 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ v_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ i_{2n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

olarak yazılmış olsun. Denklem (1) ve (2) den

$$\begin{bmatrix} z_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & y_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & z_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & z_{2n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ v_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_{2n-1} \\ v_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

bulunur. Denklem (3)'ün sağ yanındaki katsayı matrisinin tersi alındığında devredeki bilinmeyenler belirlenmiş olacaktır. Bu işlem ise, belirli bazı alt belirtenlerin (altdeterminant) bulunmasını gerektirmektedir. Gerçekten,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_{2n-1} \\ V_{2n} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} \\ \Delta_{12} \\ \Delta_{13} \\ \vdots \\ \Delta_{1,2n-1} \\ \Delta_{1,2n} \end{bmatrix} E \quad (4)$$

dir. Burada

$$\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{2n-1}, \Delta_{2n}] \quad (5)$$

ile tanımlanan bu tür özel belirtene yalın sürdüren (simple continuant), ya da kısaca sürdüren (continuant) denilmektedir [MU]. Sürdürenler yazında (literatür) ayrıntılı olarak incelenmiştir. Daha soyut olarak,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a_{2n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots -1 & a_{2n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

olarak yazalım. Kolaylıkla

$$[a_1] = a_1 \quad (7)$$

$$[a_1, a_2] = a_1 a_2 + 1 \quad (8)$$

olduğu gösterilebilir. Denklem (7) ve (8) deki ilk koşullara dayanarak,

$$[a_1, a_2, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}]$$

$$\begin{aligned}
&= [a_1 - a_{2n}] \\
&= [a_1 - 32!!!] a_{2n} + [a_1 - a_{2n-2}] \quad (9)
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. İlerde kullanacağımız, sürdürenlerle ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

$$[a_1 - a_m] = [a_1 - a_r] [a_{r+1} \sim a_m] + [a_1 \sim a_{r-1}] [a_{r+2} \sim a_m] \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
[a_1 - a_j] &= a_r [a_1 - a_{r-1}] [a_{r+1} - a_j] + [a_1 - a_{r-1}] [a_{r+2} - a_j] \\
&\quad + [a_1 - a_{r-2}] [a_{r+1} - a_j] \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a_1 - a_m] [a_n - a_r] &- [a_1 - a_r] [a_n - a_m] \\
&+ (-1)^{r \sim n} [a_x - a_{n-2}] [a_{r+2} - a_m] = 0 \quad (12)
\end{aligned}$$

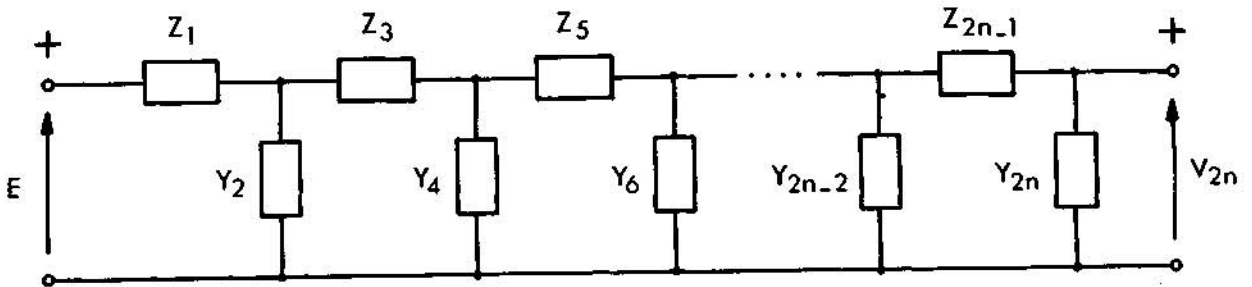
Burada $[a_i - a_j] = a^{\wedge}$ ve $[a^{\wedge} - a^{\wedge}] = 1$ alınmalıdır. Yukarıda verilen bu özelliklere dayanarak N üzerinde tanımlanabilecek devre fonksiyonlarından bazılarının değişik dereceden sürdürenler cinsinden yazılımı aşağıda verilmiştir :

$$Z = \frac{E}{I_1} = \frac{[a_1 - a_{2n}]}{[a_2 - a_{2n}]} \quad (13)$$

$$r_{2i} = \frac{V_{2i}}{E} = \frac{[a_{2i+1} - a_{2n}]}{[a_1 - a_{2n}]} \quad 1 \leq i \leq n \quad (14)$$

$$w_{2i+1} = \frac{I_{-2i+1}}{I} = \frac{[a_{2i+2} - a_{2n}]}{[a_2 - a_{2n}]} \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad (15)$$

Denklem (15) deki I, E'ye ilişkin akımı göstermektedir.



Şekil 1.

3. BASAMAKLI DEVRENİN DUYARLIĞININ İNCELENMESİ [CE-1]

Bir $F(x)$ fonksiyonunun x 'e göre duyarlılığını,

$$S_x^F = \frac{A}{3} \frac{F(x)}{8x} \quad (16)$$

olarak tanımlarsak, yukarda sözünü ettiğimiz devre fonksiyonunun duyarlıklarının da sürdürenler kullanarak aşağıdaki gibi yazılacağı görülebilir.

$$S_{a_r}^z = \frac{(-1)^{r+1} [a_{+1} - a_{2n}]^2}{[-2 - a_{2n}]^2} \quad (17)$$

$$S_{a_r}^{T_{2i}} = - \frac{[a_{2i+1} - a_{2n}] [a_i - a_{,,}] [a^{\wedge} - a_{2n}]}{[a_1 - a_{2n}]} \quad r < 2i + 1 \quad (18)$$

$$S_{a_r}^{T_{2i}} = \frac{(-1)^{r+1} [a_i - a_{2i-1}] [v_i - a_{2n}]^2}{[a_x - a_n]^2} \quad r \geq 2i + 1 \quad (19)$$

$$S_{a_r}^{W_{2i+1}} = \frac{t^{a_{2i+2} - a_{2n}} [a_2 - a_{r-1}] [a_{r+1} - a_{2n}]}{[a_2 - a_{2n}]^2} \quad r < 2i + 2 \quad (20)$$

$$S_{a_r}^{W_{2i+1}^{>}} = \frac{(-1)^{r+i} [a_2 - a_{2i+1}] [a_{r+1} - a_{2n}]^2}{[a_2 - a_{2n}]^2} \quad r > 2i + 2 \quad (21)$$

Buradan açıkça anlaşılacağı üzere sürdürenlerin bulunması için yazılacak bir program, hem devre çözümlemesini hem de duyarlıkların incelenmesini mümkün kılar.

4. SÜZGEÇ HESABI İÇİN GELİŞTİRİLEN PROGRAMIN TEMELLERİ

Şimdi, yukarda sözü edilen N devresi bir süzgeç olarak geliştirilmek istendiğinde, gerekecek bazı devre fonksiyonlarının sürdürenler cinsinden tanımlarını vererek, bunların bilgisayarla nasıl bulunacakları sorunu ele alınacaktır.

4.1 Araya Girme Kaybı

şekil-1 deki basamaklı devrenin çözümlenmesinden elde edileceği üzere çıkış gerilimi [TO-2],

$$V_{2n}(s) = \frac{1}{[Z_1, Y_2, Z_3, \dots, Z_{2n-1}, Y_{2n}]} E(s) \quad (22)$$

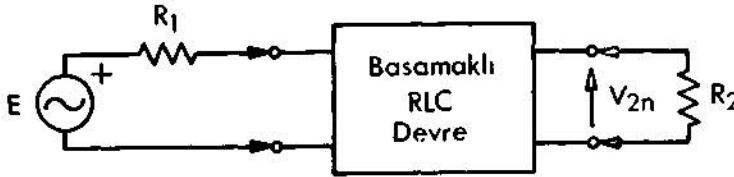
biçimindedir. Bu denklem kısaca

$$V_{2n}(s) = \frac{1}{A(s)} E(s) \quad (23)$$

olarak yazılabilir. Burada A(s) sürdüreni (6) biçimindedir. (22) denkleminde, devrenin gerilim-oranı transfer fonksiyonu,

$$\frac{E(s)}{V_{2n}(s)} = \Delta(s) \quad (24)$$

olarak tanımlanabilir.

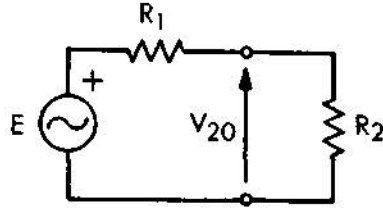


Şekil 2.

Şimdi Şekil-2'de gösterilen devreyi gözönüne alalım. Bu devre şekil-1 deki basamaklı devrenin bir özel durumudur ve bu devre için $V_{2n}(s)/E(s)$ oranı yine (24) ifadesi ile belirlenmiştir. Bu devreden 2-kapılı LC devresini çıkartarak Şekil-3'deki devre elde edilir. Bu son devre için çıkıştaki gerilim

$$V_{20} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \quad (25)$$

olur. V_{20} 'in V_{2n} 'e olan oranına "araya girme gerilim-oranı" [TO-2] denilmektedir.



Şekil 3.

$$\frac{V_{20}}{V_{2n}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta \quad (26)$$

Bu oranın, doğal logaritması (neperien) alınırsa "araya girme fonksiyonu" elde edilir [TO-2] :

$$\Gamma_{(Np)} = \ln \frac{V_{20}}{V_{2n}} = \ln \frac{R_2}{R_x + R_2} A \quad (27)$$

(26) daki ifadenin modülü desibel olarak tanımlanırsa, "araya girme kaybı" elde edilir:

$$A_{dB} = 20 \log_{10} \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta \right| \quad (28)$$

Bilgisayara Uygulama :

Bilgisayar, yazılan program yardımıyla A kontinüantını değerlendirerek gerçel ve sanal kısımlarını hesaplar

$$A = \text{Re}(A) + j\text{Im}(A)$$

Daha sonra, bu ifadeyi kutupsal koordinatlara çevirir:

$$\Delta = (P_A \angle \phi_A) * A \quad (29)$$

Burada,

$$P_A = |A| \text{ ve } \phi_A = \arctg \frac{\text{Im}(A)}{\text{Re}(A)} \text{ dir.} \quad (30)$$

Bilgisayar, bu işlemi de gerçekleştirdikten sonra, araya girme kaybını (28) denklemindeki gibi hesaplar ve faz açısı ile birlikte verir.

Not 1: $A = [Z_1 - Y_{2n}]$ ifadesinde Z_1 daima gerilim kaynağının iç direncini (R_1); Y_{2n} ise, basamaklı devrenin türü Şekil-4a ve 4b'de gösterilen biçimde olduğuna göre, sırasıyla ya $CY_{2n} + G_2$ veya yalnızca G_2 'yi gösterir ($R_{in} = 1/G_2$ basamaklı devreyi sonlandıran yük direncidir).

Not 2: $R_L = R_2$ halinde, (26) denklemi $V_{20}/V_{2n} = A/2$ olacağından, (28) ile verilen araya girme kaybı

$$A_{dB} = 20 \log_{10} \frac{M}{81_0 - T} \quad (31)$$

biçimini alır. Bu durumda, araya girme kaybı, "işletme kaybı"na [CA] eşittir.

Not 3: Bilgisayar, kollardaki empedans veya admitansların faz açılarını -180° , $+180^\circ$ sınırları arasında verir.

4.2 Basamaklı Devrenin Giriş Empedansı

Şekil-4a ve 4b'den görüleceği üzere basamaklı devrenin türüne göre sürdüren değişecektir. Y_{2n} 'nin ya da rasgele bir immitansın devrede bulunmamasında bu immitansa ilişkin kola "0" admitanslı (veya empedanslı) bir 2-uçlunun konulması gerekir. Bu işlem sürdüren değerini değiştirmeyeceğinden yazılan denklemlerin genelliği bozulmayacaktır.

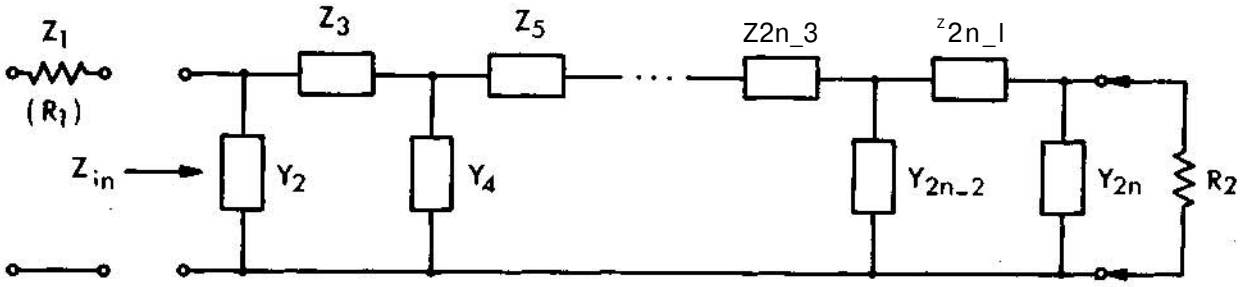
Devre türüne göre giriş empedanslarının ifadeleri [HW-I] şöyledir:

$$\text{A tipi (Şekil-4a)} : Z_{in} = \frac{[Z_3 - (G_2 + Y_{2n})]}{[Y_2 - (G_2 + Y_{2n})]} \quad (32)$$

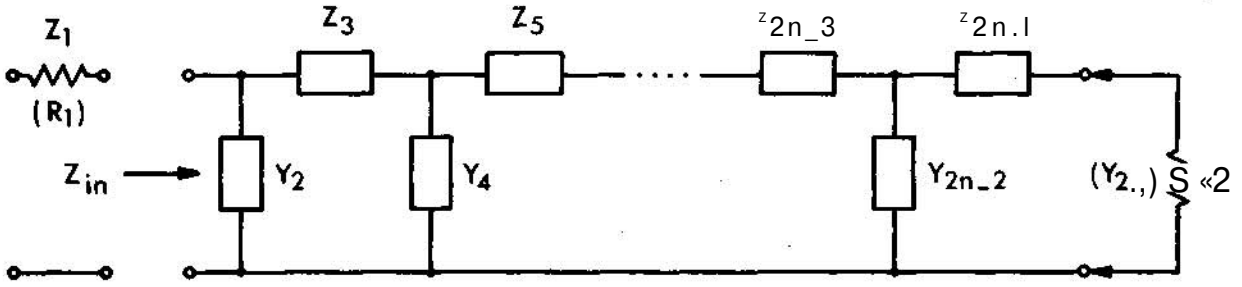
$$\text{B tipi (Şekil-4b)} : Z_{in} = \frac{[Z_3 - G_2]}{[Y_2 - G_2]} \quad (33)$$

Bilgisayara Uygulama :

Bilgisayar, önce pay ve paydadaki sürdürenleri kutupsal koordinatlarda hesaplar:



Şekil 4a.



Şekil 4b.

$$Z_{in} = \frac{\Delta_{pay}}{\Delta_{payda}} = \frac{(\rho_{pay} \gg e_{pay})}{\wedge^p \text{payda} \wedge s_{payda}} \quad (34)$$

Daha sonra bu denklem yardımı ile giriş empedansının modülünü,

$$\rho_{Z_{in}} = |Z_{in}| = \frac{\rho_{pay}}{\rho_{payda}} \quad (35)$$

ve faz açısını

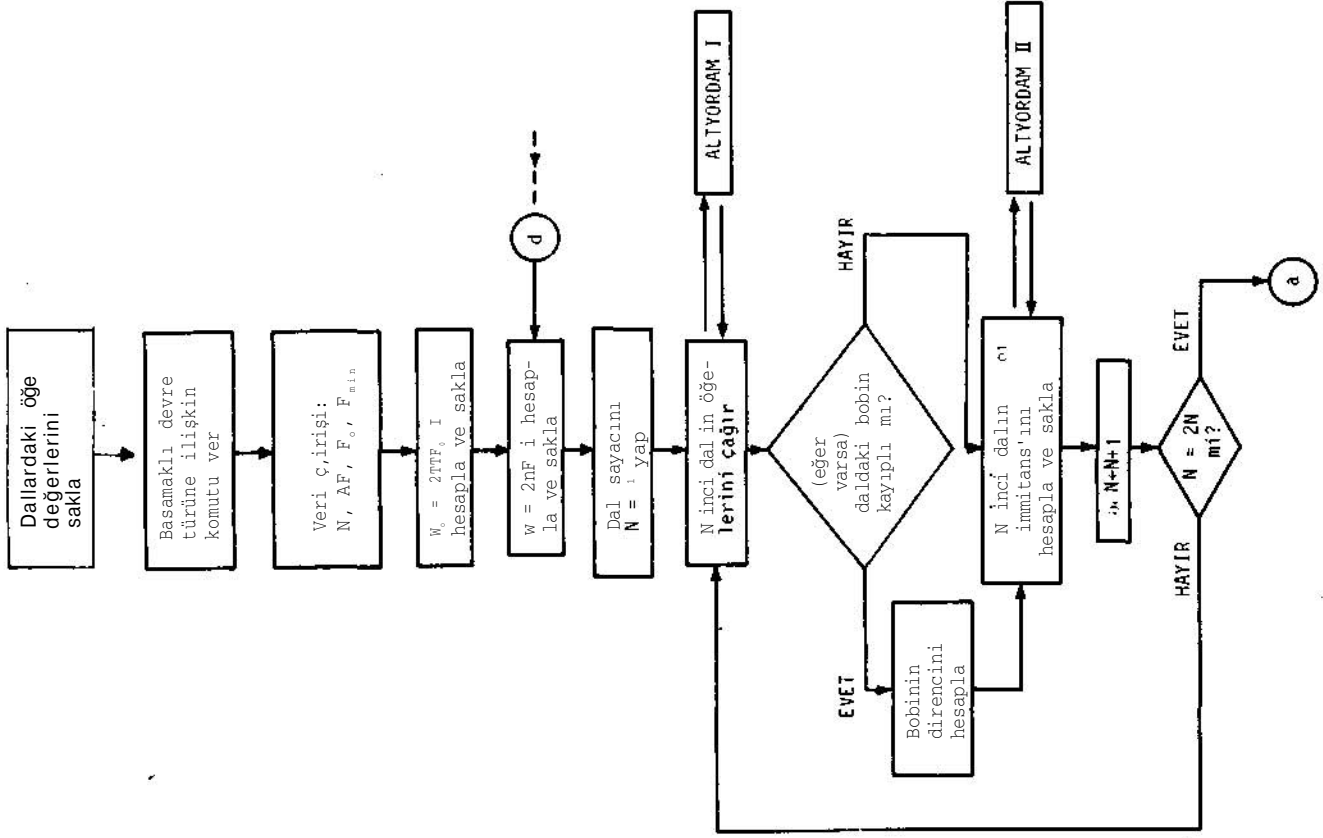
$$\theta_{Z_{in}} = \text{arc}(Z_{in}) = (\theta_{pay} - \theta_{payda}) \quad (36)$$

olarak bulur.

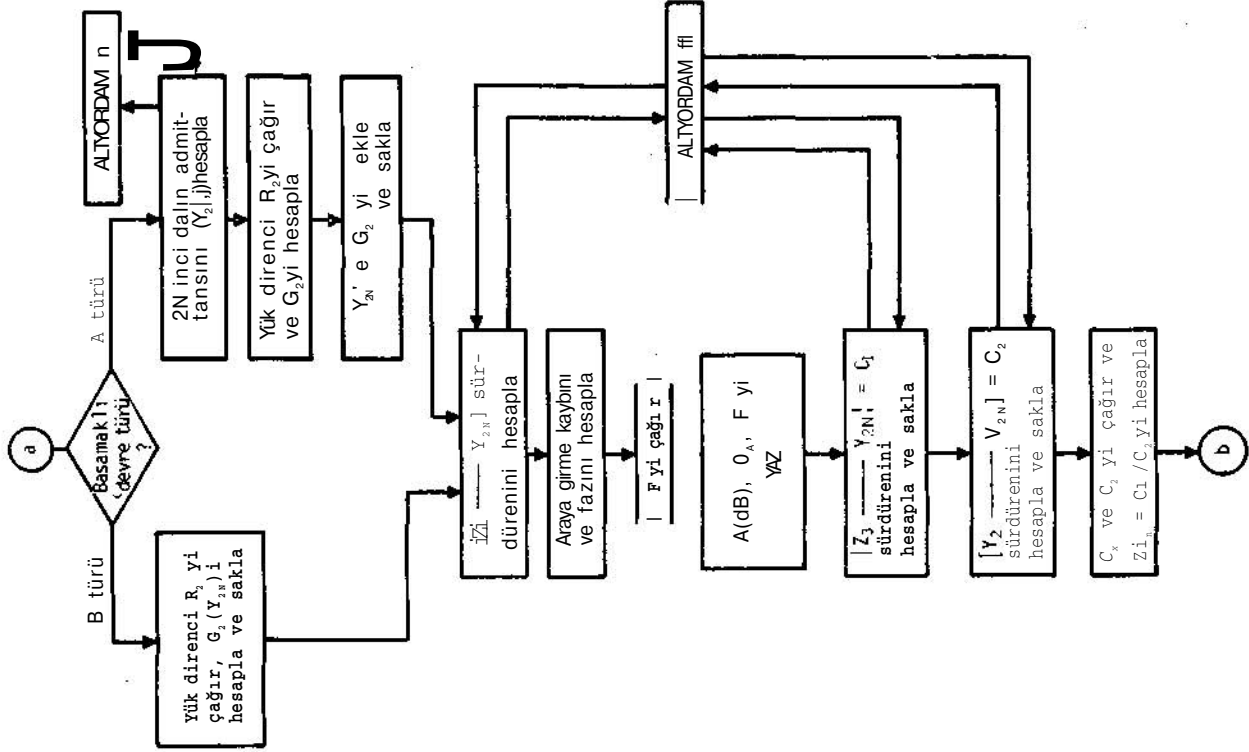
4.3 Basamaklı Devrenin Giriş Kapısına Göre Yansıma Kaybı

"Yansıma fonksiyonu" [TO-3], [HU]

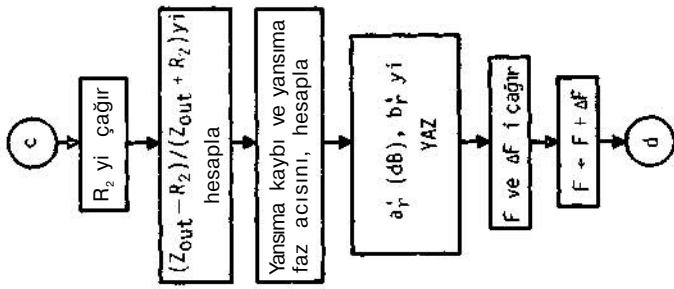
$$\Sigma = \frac{z_{in} - R_1}{z_{in} + R_1} \quad (37)$$



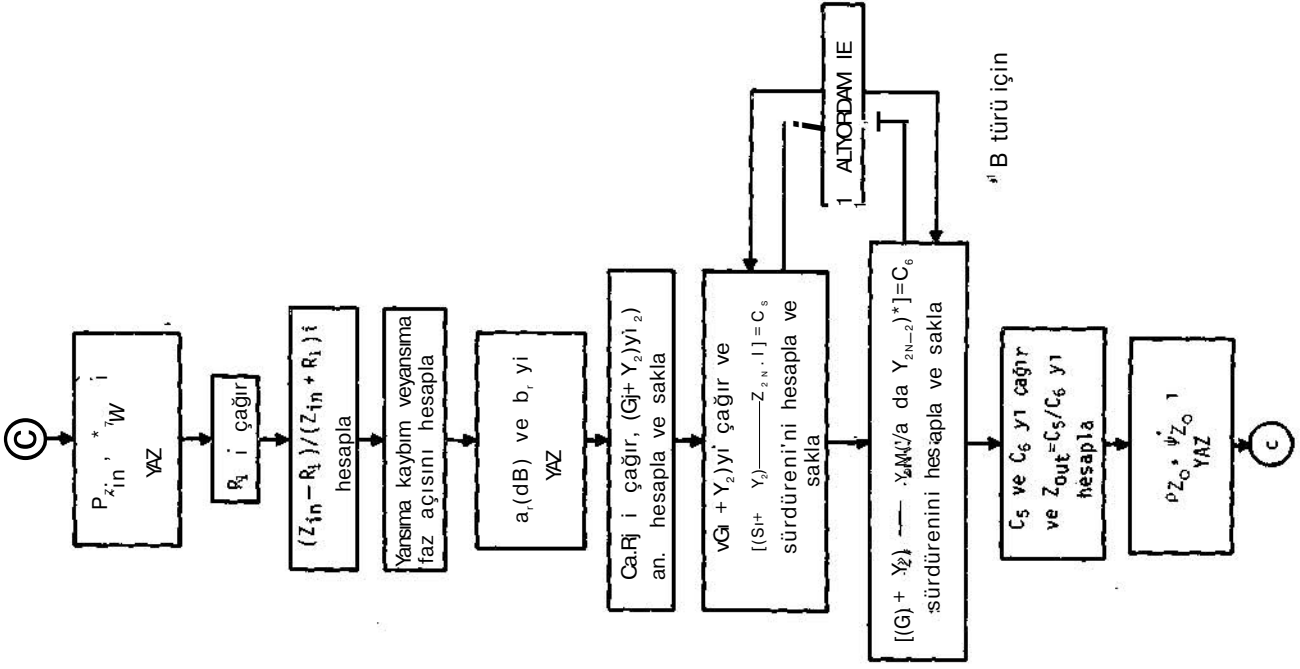
Şekil 6a.



Şekil 6b.

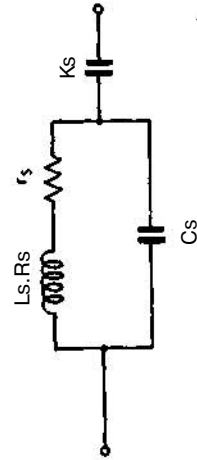
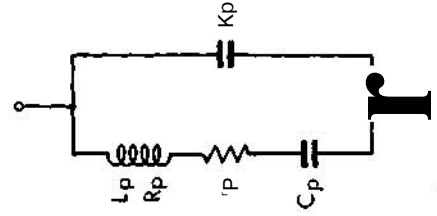


Şekil 6d.



Şekil 6c.

PARALEL KOL (Y)



SERİ KOL (Z)

Şekil 7.

olarak tanımlanmıştır.

"Yansımaya kaybı" ve "Yansımaya faz açısı" [HW-2] ise, sıra ile

$$\alpha_r(\text{dB}) = 20 \log_{10} \frac{1}{|\Sigma|} = 20 \log_{10} \frac{|Z_{in} + R_1|}{|Z_{in} - R_1|} \quad (38)$$

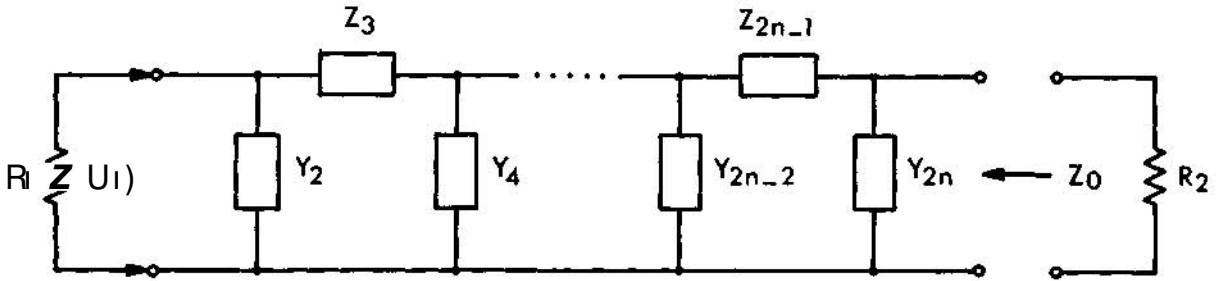
$$\beta_r = \arctan \frac{1}{\Sigma} = \arctan \frac{Z_{in} + R_1}{Z_{in} - R_1} \quad (39)$$

denklemleri ile verilebilir.

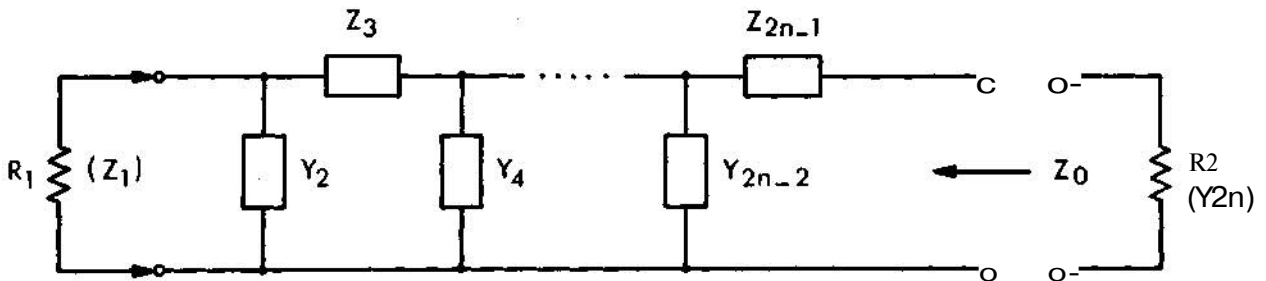
Bilgisayar, Z_{in} 'i hesapladıktan sonra yukarıdaki denklemlere göre yansımaya kaybını ve faz açısını bulur.

4.4 Basamaklı Devrenin Çıkış Empedansı

Bilgisayar, devrenin türüne göre (Şekil-5a ve 5b), basamaklı devrenin çıkış empedansını aşağıdaki denklemlere göre hesaplar [HW-3] :



Şekil 5a.



Şekil 5b.

$$\text{A tipi (Şekil-5a)} : Z_o = \frac{[(G_1 + Y_2) \text{---} Z_{2n-1}]}{[(G_1 + Y_2) \text{---} Y_{2n}]} \quad (40)$$

$$\text{B tipi (Şekil-5b)} : Z_o = \frac{C(G_1 + Y_2) \text{---} Z_{2n-1}}{[(G_1 + Y_2) \text{---} Y_{2n-2}]} \quad (41)$$

4.5 Basamaklı Devrenin Çıkış Kapısına Göre Yansımaya Kaybı

Çıkış kapısına göre "yansımaya fonksiyonu"

$$E' = \frac{z_o + R_2}{z_o + R_2} \quad (42)$$

denklemlerle tanımlanır [TO-3], [HU].

Aynı kapiya ilişkin "yansımaya kaybı" ve "yansımaya faz açısı" [HW-2]

ise, sıra ile

$$a_r(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left| \frac{1}{1 - R_2/z_o} \right| = 20 \log_{10} \left| \frac{z_o}{z_o - R_2} \right| \quad (43)$$

$$b_r' = \arccos \frac{1}{E'} = \arccos \frac{z_o + R_2}{z_o - R_2} \quad (44)$$

denklemlerle verilebilir.

Bilgisayar, Z_o 'yu hesapladıktan sonra, yukarıdaki denklemlerden, yansımaya kaybını ve faz açısını bulur.

5. GELİŞTİRİLEN PROGRAMLA İNCELENEBİLECEK DEVRE TÜRLERİ

1- Basamaklı devrenin seri ve paralel kollarında bulunan ve bu programla incelenebilecek en genel devre biçimleri Şekil-7'de gösterilmiştir. İncelenmesi istenilen basamaklı devrede, Şekil-7'de belirtilen standart devreler dışında başka devreler bulunuyorsa, bu devrelere, bazı durumlarda alışılmış devrelere uygun düşen eşdeğer devreler kurulabilir ve böylece eldeki program bu tür

devreler için de geçerli olur.

2- İdeal transformatör ile sonlandırılan basamaklı devreler de birtakım değişikliklerden sonra bilgisayara uygulanabilir.

6. SONUÇ

Şekil-6'da basitleştirilmiş akış çizelgesi verilmiş olan bu program, her ne kadar basamaklı edilgin RLC devrelerinin çözümlenmesini yapmak için hazırlanmışsada, bu devrelerin duyarlık çözümlenmesi, programda yapılacak küçük bir değişiklikle gerçekleştirilebilir.

Genel sürdüren tanımını kullanarak, basamaklı devreler dışında bazı tür devrelerin de hem çözümlenmesinin, hem da duyarlığının hesaplanabileceği gösterilmiştir [McN], [CE-2]. Böylece eldeki programda yapılacak yeni bir değişiklik ile daha karışık devrelerin de çözümlenmesini yapmak olanağı vardır.

Yazılmış olan program, HEWLETT-PACKARD 9100B-9101A-9125A hesaplayıcı dizgesine başarıyla uygulanmış ve bütün eğriler "9125A çizici" yardımı ile çizdirilmiştir. Bu arada, grup gecikme (group delay) karakteristiğinin de programa yapılan küçük bir katkıyla çizdirilmesi sağlanmıştır.

Kullanılan hesaplayıcı dizgesi ile incelenebilecek basamaklı devrenin kol sayısı en çok 32 olabilmektedir.

KAYNAKLAR:

[CAI] : W. Cauer, Synthesis of Linear Communication Network, s.8, McGraw Hill Book Co., Inc., 1958.

[CE-1] : Y. Ceyhun, "Sensitivity Calculations of Ladder Networks by using Continuants", Electronics Letters, Cilt 7, No.7, s.157-158, Nisan 1971.

[CE-2] : Y. Ceyhun, "On the Properties of Continuants and Sensitivity Computations", IEEE Trans. on Circuit Theory, Cilt CT-20, s.169-171, Mart 1973.

[HU] : D.S. Humpherys, The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters, s. 113-115, Prentice-Hall, Inc., 1970.

- [HW-1] : J.L. *Herrero-G. Willoner*, Synthesis of Filters, s.44, Tablo 2.2., Prentice-Hall, Inc., 1966.
- [HW-2] : Kaynak HW-1 , s. 49.
- [HW-3] : Kaynak HW-1 , s.45, Tablo 2.3.
- [McN] : *R.L. McNally*, "RC Filter Synthesis", Ph.D. dissertation, Dep. Elec. Eng. and Syst. Sci., Michigan State Univ., East Lansing, Mich., 1969.
- [MU] : *T. Muir*, A Treatise on the Theory of Determinants, s.516-565, Dover Publications, Inc., 1960.
- [TO-1] : *Y. Tokad*, "Foundations of Passive Electrical Network Synthesis", Cilt 1, s.264-265, M.E.T.U., Faculty of Engineering, Publication Na 41, 1972.
- [TO-2] : *Y. Tokad*, "Foundations of Passive Electrical Network Synthesis", Cilt 2, s.199, M.E.T.U., Faculty of Engineering, Publication No.41, 1972.
- [TO-3] : Kaynak TO-2 , s.218.

FAYDALANILABİLECEK DİĞER EK YAZILAR:

- [CE-3] : *Y. Ceyhun*, "Çizge Kuramının Temelleri I", Elektrik Mühendisliği, Cilt 18, No.205-206, Ocak-Şubat 1974.
- [CE-4] : *Y. Ceyhun*, "Çizge Kuramının Temelleri II ", Elektrik Mühendisliği, Cilt 18, No.207, Mart 1974.