

# sayısal süzgeçler

a. rıza akçay

## ÖZET

UDK: 621.3 72.54

Günümüzde büyük önem kazanan sayısal süzgeçleri tanıtan bu yazıda, önce gerekli ön bilgiler verilmiş, daha sonra sayısal süzgeçlerin çözümlenmesi ve tasarımı üzerinde durulmuştur. Kavramların ve uygulamaların anlaşılmasını olanaklı kılmak amacıyla örneklere de geniş ölçüde yer verilmiştir.

## SUMMARY

Digital filters v/hich have great importance in todays technology are introduced in this article. After having developed the necessary background, the analysis and synthesis of digital filters are discussed and the concepts introduced are extensively illustrated by examples.

## GENEL

Sayısal süzgeçler için gerekli olan örnekselden sayısala ve sayısaldan örneksele çevirileri daha iyi anlamak için aşağıdaki önbilgiler verilmiştir.

### 1. ÖRNEKLEME

Örnekleme, zaman uzayında düzgün olarak dağılmış anlarda imin değerlerini elde tutma işlemidir, örneksel im, zamana bağlı olarak sürekli bir değişim gösterdiğinden, örneksel düzenler üzerinden ancak sürekli olarak gönderilebilirse karşı tarafta alınabilir. Oysa sayısal düzenlerde değişim kesikli olduğundan örneksel imden belli anlarda değerler alıp göndermek, kalan sürede de başka imleri aynı biçimde göndermek uygundur. Ancak örneksel imden alınan örneklerin sıklığı önemlidir. Kulağın, imin gönderilmediği süreyi ayırtedememesi gerekir. Alışılacağı, Shannon yada Nyquist örnekleme kuramı olarak bilinen sonuçlar, bir örneksel imin aslına uygun olarak alıcıda yeniden kurulması için örnekleme sıklığının, örneksel imin sıklık bandındaki en yüksek sıklıktan en az iki kez büyük olması gerektiğini gösterir. Yani örnekleme sıklığı  $f_s$ ; sıklık bandının en yüksek bileşeni,  $f_m$  ise

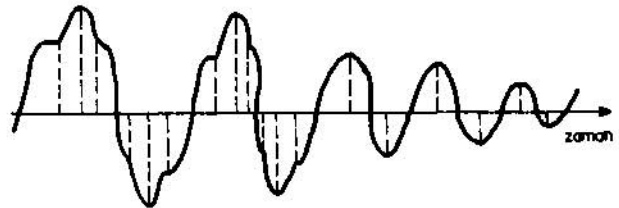
$$f_s > 2f_m$$

olmak zorundadır.

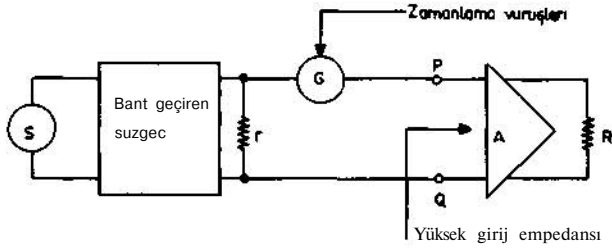
A. Rıza Akçay, PTT Araştırma Laboratuvarı

Örnekleme sıklığının 8000 Hz olduğunu varsayarsak,  $f_s = 1/T$  denklemi uyarınca, 125 ps'de bir örnekleme yapmak gerekir. Şekil 1.1'deki gibi bir ses dalgasını ele alalım. Burada eşit zaman aralıklarıyla örneksel imden örnekler alınmıştır. Çizgilerle boyutsuz gösterilen bu zaman aralığı, aslında belirli bir örnek alma süresi kadardır. Öyle ise şekildeki düşey eksene koşut çizgiler, örnek alma anındaki im genliğini gösterirler. Mikrosaniye dolayındaki bu sürede genlikte büyük bir değişiklik olmadığı varsayılarak, bu vuruşun genliğine değişmez olarak bakılır. Buna ani örnekleme denir. Genlik değişimi olduğu gibi alınarak yapılan örneklemeye doğal örnekleme diyeceğiz.

Çıkışında çok kısa süreli akım yada gerilim darbeleri üreten bir düzen, zaman uzayında örnekleme düzeni diye bilinir. Öyle ki bu darbeler ses dalgasının gözönüne alınan anlardaki ani değerlerini verirler. Herbiri değişik genlikte olabilir. Bu nedenle bunlar, vuruş genlik bindirimlidir. Şekil 1.2'de bu işlemi yapabilecek bir düzen verilmiştir. Ses kaynağı, bant geçiren bir süzgeç-



Şekil 1.1. Bir ses dalgasından örnek alma.



Şekil 1.2. Zaman-örnekleme düzeninin öbek çizimi.

çe uygulanmıştır. Bu süzgecin amacı sıklık bandını sınırlamak olup, örnekleme işlemi sırasında sanal sıklıkların ortaya çıkmasını önler. Süzgeç, r direnci ile sonlandırılmıştır.

G, uygun zamanlama darbeleriyle, r üzerindeki ani gerilimin A yükseltecinin girişine aktarılmasını sağlar. Bu yükselteç yüksek bir giriş empedansı gösterir. A yükseltecinin çıkışındaki R yük direnci üzerinde G'ye vuruş uygulanıp uygulanmamasına göre bir dizi vuruş elde edilir. P, Q noktalarının solundaki devreye eşdeğer bir ikinci devre, P, Q noktalarına bağlanabilir. Ve zamanlama vuruşları özdeş sıklıklı, fakat zaman ekseninde biraz kaymış olarak düşünülürse, bir ikinci kaynağı örnekleme olanağı vardır.

## 2. ADIMLAMA \*

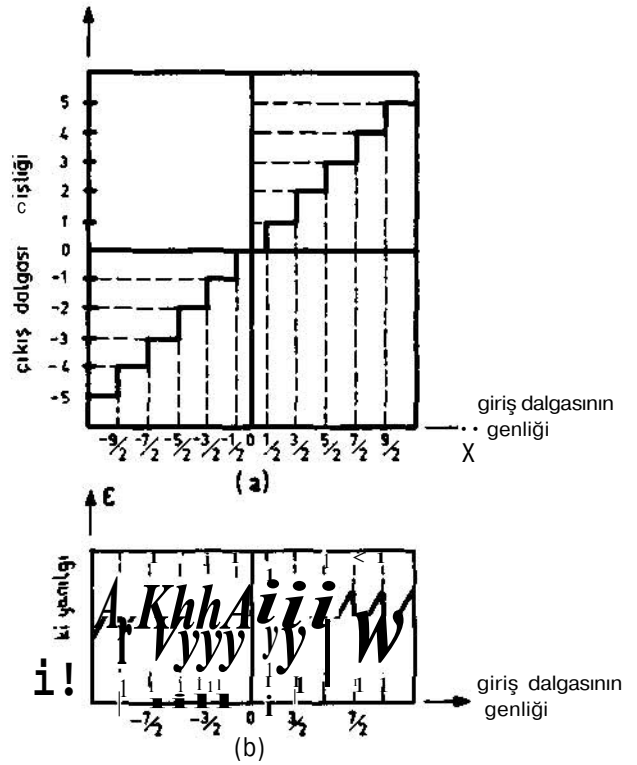
Örneklenen im genliğinin belirlenmiş kesikli değerlerden birine eşit alınması işlemine adımlama denir. Şekil 2.1 adımlama işlemine ilişkin değişkenler arasındaki bağıntıyı göstermektedir.

Adımlamada ilk akla gelen şey tepeden tepeye olan im genliğini belli bir sayıya bölerek belirli adımlama düzeyleri elde etmektir, örneğin, 8 V' luk bir gerilimi, 128 aralığa bölerek adımlamak isteyelim. Burada 128 adım düzeyi vardır denir. Çıkıştaki imin alabileceği kesikli değerlerin sayısı adım düzeyleri sayısını verir. Burada her düzey 62,5 mV'a karşılık gelir. 62,5 mV, adımlama adımı yada basamağı adını alır. Adımlama adımı belirli düzeylerden herbirinin genişliğidir.

0-62,5 mV birinci düzey, 62,5-125 mV ikinci düzey vb. olmak üzere belirlenirler. Böylelikle adımlayıcının girişine 0-62,5 mV arasında hangi örnek genliği gelirse gelsin, örneği karşı tarafta yeniden elde ederken (buna adımlayıcının çıkışı demek uygun olur) bu aralığı ancak tek bir gerilim değeriyle belirtebiliriz. Kodlayıcıya giren 0-62,5 mV arası, çıkışta 0 yada 62,5 mV gibi tek bir değer olarak kabul edilebilir. Bunun gi-

\* Yabancı dillerdeki "Çuanta" sözcüğüne karşılık bu yazıda "adım" kullanılmış, "Quantization", "Quantizer" yerine de "adımlama" ve "adımlayıcı" denilmiştir. Bu karşılığın çok başarılı olmadığını bilmekle birlikte daha önce önerilmiş "nicem" ve "tane" sözcüklerinden daha iyi olması, yabancı bir kökten "kuantalama", "kuantalayıcı" gibi sözcükler türetmenin de yanlışlığı nedeniyle "adım" kökünü yeğledik.

(Elektrik Mühendisliği)



Şekil 2.1. Adımlama

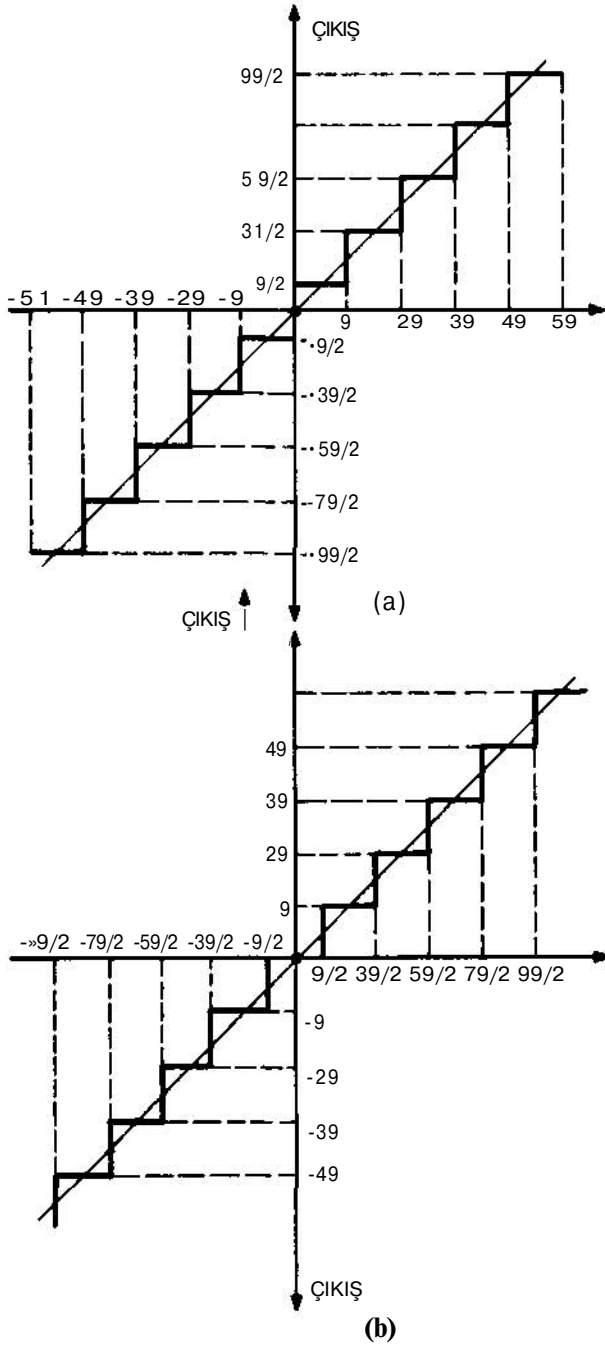
- Adımlama özeliği
- Adım gürültüsü

bi 62,5-125 mV arası 62,5 yada 125 mV; 125-187,5 mV arası da 125 yada 187,5 mV olmak üzere saptanabilirler. Ancak çıkışı böyle tanımlamamız durumunda, iki tabanına göre yazılan kodlarla kodlama işlemi sırasında bir adım üzerinde belirsizlik ortaya çıkar, tik düzeyin çıkışta 0 V alınması durumunda en üst düzey; 62,5 mV alınması durumunda ise en alt düzey çıkışta gözönüne alınmayacak demektir. Bu belirsizliği yarıya indirmek için (0-62,5 mV) arasındaki birinci düzey çıkışta ikisinin ortalaması olan 31,25 mV ile belirlenir. (62,5-125 mV) arası 93,75 mV; (125-187,5 mV) aralığı da 156,25 mV olmak üzere saptanır. Böylelikle çıkışta 31,25 mV'un altındaki gerilim değerleriyle, en üst düzeyin üst yarısı olan (7.96875-8V) aralığı elde edilemez. Bu sayısal açıklamalardan adımlayıcının girişine, q adımını göstermek üzere;  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$  artı ve eksi tam sayılar olmak koşuluyla  $nq$  ile  $(n+1)q$  arasındaki tüm değerlerden hangisi uygulanırsa uygulansın çıkışında  $(2n+1)q/2$  elde olunacağı anlaşılır. (0 - q) aralığı  $q/2$ ; (q - 2q) aralığı  $3q/2$ ; (2q - 3q) aralığı  $5q/2$  olmak üzere adımı ayıcı çıkışında ortaya çıkarlar.

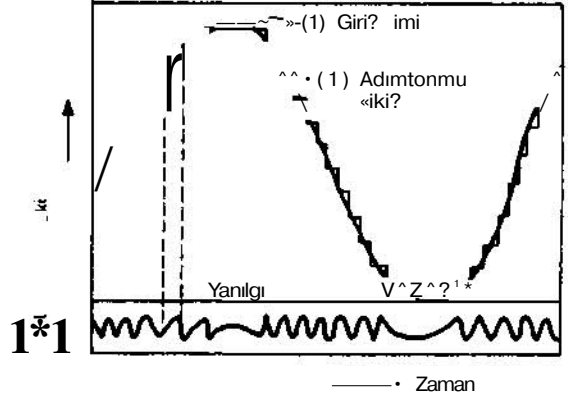
8V, 128 düzey yerine, tepeden tepeye (-8V, +8V) arasında alınan bir gerilimi; (-8V - 0V) arasını eksi 128 düzey (0V - 8V) arasını artı 128 düzey olmak üzere 256 düzeyde adımlayabiliriz. Kullanılan ses dalgası ister sinüs dalgası, ister 0 ortalamalı Gauss dağılımlı bir işlev olsun, 0 ortalaması özeliğinin sonucu olarak adımlayıcı özeliği 0 noktasına göre bakışlıdır.

## 2.1. Birbiçimli yada Doğrusal Adımlamadaki Adım Gürültüsü

Yukarıda açıklandığı biçimde, belirli bir gerilim değerini yada genel olarak akım da olabilen bir imin değerini adımları eşit almak koşuluyla adımlamaya doğrusal yada birbiçimli adımlama denir.



Şekil 2.2. Adımlama  
a. Adımlama özeliği  
b. Adımlama eğrisinin değişik bir yorumu



Şekil 2.3\* Adımlanmış bir im ve yanılğı eğrisi.

Şekil 2.2a'da adımlama işleminin 0 volt dolayındaki durumu gösterilmiştir. Şekil 2.2b ise çoğunlukla kullanılan, adımlama işleminin dolaylı olarak anlaşılmasını sağlayan özeliği vermektedir. Özellikle gürültü hesaplamasında bu eğri göz önünde tutulur. Gerçekten  $nq$  ile  $(n+1)q$  arasındaki girişlerin  $(2n+1)q/2$  olarak çıkışta belirlenmesinin başka bir anlamı da vardır. Bunu şöyle açıklayabiliriz. Çıkıştaki  $q/2, 3q/2, 5q/2, \dots$  değerlerini birleştiren eğriyi çizersek, bunun üzerinde  $q, 2q, 3q, \dots$  değerleri de vardır. Acaba çıkışta  $nq$  olarak belirlenen bir değer adımlayıcı girişindeki hangi değerleri belirler? Basit bir ortalama hesabı bize çıkışta  $nq$  olarak belirlenen değer girişteki  $(2n-1)q/2$  ile  $(2n+1)q/2$  aralığına karşılık geldiğini belirtir. Gürültü hesabını yaparken bu kavramdan işe başlamak kolaylık sağlar.

Düz çizgiler düşüncel (ideal) adımlayıcıyı belirtir. Birçok girişlerin tek bir  $nq$  değeri ile gösterilmesi bir yanılğıya neden olur. Bu da imin genliğinden bağımsız olup salt değer olarak en fazla  $q/2$  kadardır.

Şekil 2.1b'de bu yanılğının testere dişine benzer değişiminin her adım düzeyinde yinlendiği görülmektedir. Bu bir adımlama bozulmasına neden olur ve imin genliğinden bağımsızdır.  $q$  küçüldükçe adım gürültüsünün azalacağı görülmektedir. Bunun için adım düzeyleri sayısını artırmak gerekir. Bu da devre yapısının çok daha karmaşık olacağı anlamına gelir. Adım gürültüsü özellikle küçük genlikli imler üzerinde etkindir. Ses imlerini iyi iletebilmek için genlik değerlerininin  $1/100$ , hatta bazen  $1/1000$ 'e kadar olan ayrıntılarla saptanması gerekir. Bu da 35-40 dB, hatta 60 dB'lik bir aralığın elde tutulması anlamına gelir. İşte bu çok güçsüz düzeylerde adım gürültüsü gücünü elden geldiğince azaltmak, birbiçimli adımlamada, ancak düzeyleri çok artırmakla yerine getirilebilir.

Şekil 2.3'te bir dalganın adımlanması ve yanılğı eğrisi verilmiştir.

## 2.2. imin Adımlama Gürültüsüne Oranı

Adımlama sonucunda;  $nq$ ,  $n$ 'inci düzeye karşılık gelen dayanak gerilim olmak üzere,  $q$  adım basa-

mağı genişliği olmak koşuluyla

$$\frac{(2n-1)}{2} q^x < \frac{2n+1}{2} q \quad (2.1)$$

aralığındaki bir X girişinin nq ile gösterilebileceğini belirtmiştik. (2.1) eşitsizliğinden

$$nq - \frac{q}{2} \leq X \leq nq + \frac{q}{2} \quad (2.2)$$

elde edilir.

İmin, q aralığındaki istatistiksel dağılımı P(X) ise, adımlama gürültüsünün gücü

$$B_n = \int_{nq - \frac{q}{2}}^{nq + \frac{q}{2}} (x-nq)^2 P(x) dx \quad (2.3)$$

olarak tanımlanabilir.

q aralığının küçük olduğunu ve P(X) in bu aralıkta değişmediğini varsayacak olursak, (2.3)

$$B_n = \frac{1}{12} \cdot P(nq) \cdot q^3 \quad (2.4)$$

biçimini alır.

P(nq) n'inci aralık\*,- dc^L\_i:i "iği düşünülen P(X) değeridir. q-p(nq) = p(n) inin n'inci düzeyde olma olasılığını gösterecek olursa

$$B_n = 1 \cdot 2^{-n} \cdot P(n) \quad (2.5)$$

elde edilir.

Tüm adımlama basamaklarındaki toplam gürültü gücü

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{1}{12} \sum_{n=1}^{\infty} P(n) q^2 \text{ dir.} \quad (2.6)$$

Tanım uyarınca fP(n) = 1 olduğundan, tüm basamakların eşit olduğu varsayımıyla birbiçimli adımlamada

$$B = \frac{1}{12} q^2 \quad (2.7)$$

bulunur,

İm/gürültü oranı

$$\frac{S}{B} = \frac{12S}{q^2} \quad (2.8)$$

olarak gösterilir.

(2.7)'deki denklemden, gürültünün karesel ortalamasının yani gürültü gücünün  $q^2/12$  olduğu görülmektedir. q yerine bunun yarısı alınırsa, yani düzeylerin sayısı iki kat artırılırsa gürültü gücü dört kez azalmış olur, bu da 6 dB'lik bir gürültü düzeyi güçsüzlemesine karşılık gelir. Öyle ise gürültüyü azaltmak için adımlama düzeylerini artırmak başvurulabilecek bir yoldur.

$q^2/12$ 'lik bir gürültü gücünün  $q/\sqrt{3}$  lük bir etken gürültü gerilimine karşılık geleceği, karekök olarak kolaylıkla bulunur. Ayrıca (2.8)'deki S gürültü gücünü de gerilimin etken değerinin karesine bağlı olarak yazabiliriz. Etken gerilim değerleri türünden (2.8) denklemi

$$S/B = \left( \frac{2/1V}{q} e^{k} \right)^2 \quad (2-9)$$

biçiminde yazılabilir. Güçlü düzeylerde bir doyma olayı ortaya çıkar ve imin türüne bağlı olan bir sınırlama gürültüsü doğar.

### 3. KODLAMA

Adımlama konusunda söylendiği gibi, adımlanmış bir örnek, belirlenmiş kesikli değerlerden biriyle gönderilebilir. Ancak ses için yaklaşık olarak 100 örnek genliği kullanmak gerektiğinden, bunları karşıda birbirinden ayırdedebilecek devreler yapmak güçtür. Buna karşılık bir vuruşun varlık yada yokluğunu anlayabilecek devreler kolaylıkla yapılabilir. Ses için 100 dolayında örnek genliği gerektiğinden, ikili sayı düzeniyle bu genlikleri belirtmek için  $2^7 = 128$  ayrı kod kullanmak yeter. İkili kodlama dediğimiz bu düzen bugün çoğunlukla kullanılmaktadır. Yedi haneli sıfır ve birlerden oluşan her iki sayı bir adım düzeyine karşı düşürülür. Adım düzeyleri sayısını artırmak için ikili sayının hanesini artırmak gerekir. Örneğin, sıfır ve birlerden oluşmuş sekiz haneli ikili sayılarla 256 adım düzeyini kodlama olanağı vardır. Bir cetvelle gösterecek olursak, koddaki vuruşların sayısı ve adımların sayısı arasında aşağıdaki gibi bir değişim elde edilir.

n = koddaki darbe sayısı	adım sayısı ( $2^n$ )
5	32
6	64
7	128
<b>8</b>	256
9	512
10	1024
11	2048

Kodlama için sıfır ve birlerden oluşmuş vuruş dizileri yerine değişik sayıda vuruş bileşenlerinden oluşmuş diziler kullanılabilir. Bu vuruş bileşenlerinin sayısı 3 ise (ternary) üçlü, dört ise (quaternary) dördü vb. kod sistemleri adını alırlar. Genel olarak elde edilen adım sayısı, b kullanılan bileşen sayısını göstermek üzere,  $b^n$  dir. İkili düzende vuruş dizilerinin bileşenleri sıfır ve bir olduğundan  $b = 2$ , adım sayısı  $2^n$  dir. Genel eğilim ikili sistem üzerindedir. Uzak aralıklı iletişim düzenlerinde yüksek im/gürültü oranı gereği ikiden fazla bileşen içeren kodlama düzenlerinin kullanılmasını gerektirir.

#### 3.1. Kodlanmış Bir İmde Gürültü Değeri

Adımlanmış bir imde toplam im/gürültü oranınının

$$S/B = \left( \frac{2/\sim 3v}{q} k \right)^2$$

olduğunu (2.9) denkleminde söylemiştik.

Tepeден tepeye gerilim; q adım olmak üzere  $V = b^n \cdot q$  biçiminde yazılabilir. Değişimin sinüseldiğini varsayarak bir yarıçevrimin enbüyük tepe değeri  $b^n q/2$  dir. Etken değeri elde etmek için bunu  $1/\sqrt{2}$  ile bölmek gerekir. Öyleyse

$$v_{\text{etk}} = \frac{b^n \cdot q}{2} \quad (3.1)$$

yazılabilir.

Bunu, S/B'nin verildiği denklemde yerine koyacak olursak

$$S/B = \left( \frac{b^n \cdot q \cdot \sqrt{3}}{q} \right)^2 \quad (3.2)$$

bulunur.

$$10 \log S/B = 20 \log b^n + 10 \log 3 - 10 \log q$$

$$b = 2 \text{ varsayımı ile} \quad (3.3)$$

$$10 \log S/B = 6n + 1,76 \text{ dB}$$

dir.

tm/gürültü oranı türlü biçimlerde tanımlanabildiğinden  $V_{et,k}$  yerine tepeden tepeye gerilimi alırsak, bu oran  $(2/2)^2$  çarpanıyla artar; bu da 9 dB'lik artışa denk düşer.

$$10 \log S/B = 6n + 10,79 \quad (3.4)$$

olur.

Uygulamada en çok rastlanan tanım (3.3)'teki denklemdir. Bu denklem genel olarak  $6n-k$  biçiminde yazılabilir, k imin türüne göre değişebilir ve  $-2 < k < +9$  sınırları arasındadır. Ele aldığımız örnekte ses imini sinüsel aldığımızdan  $k=1,76$  bulunmuştur. Sinüsel bir modelin yeterli sonuçlar vermediği yerlerde normal bir genlik dağılımı benimsemek zorunluğudur. Şimdi böyle bir im için k'nın kaç olacağını araştıracağız.

Adımlayıcı imin değişim aralığının  $-4 V_{et,k} + 4 V_{et,k}$  arasında olduğunu varsayalım. Bu değişim aralığı sıfır ortalamalı bir Gauss P(X) işlevine oldukça uygundur. Öyle ki im örneklerinin değerleri  $1/10\ 000$  den daha az bir olasılıkla bu aralığın dışına düşerler. Öyleyse imin tepeden tepeye olan değerini  $8 V_{et,k}$  almak olanaklıdır. Adım  $q = 8 V_{et,k} / 2^n$  olarak bulunur ve

$$S/B = \left( \frac{2\sqrt{3} V_{et,k}}{q} \right)^2$$

de yerine koyacak olursak

$$10 \log S/B = 6n - 7,26 \quad (3.5)$$

elde edilir.

Buralarda söz konusu edilen gürültü yalnızca adım gürültüsü olup, ne sinüsel im, ne de Gauss dağılımlı bir im için elde edilen denklemler uygulamada yeterli sonuç vermezler.

Kodlayıcılarda bir de saptam yanlışlığı vardır ki bu da adımlama yanlışlığına göre çok etkisiz sayılabilir. Saptam yanlışlığı kod açıcıya gelen bir kodun yanlış bir gerilim örneğine çevrilmesidir.

### 3.2. Sayısalardan Örnekselle Çevirgeç (S/ö)

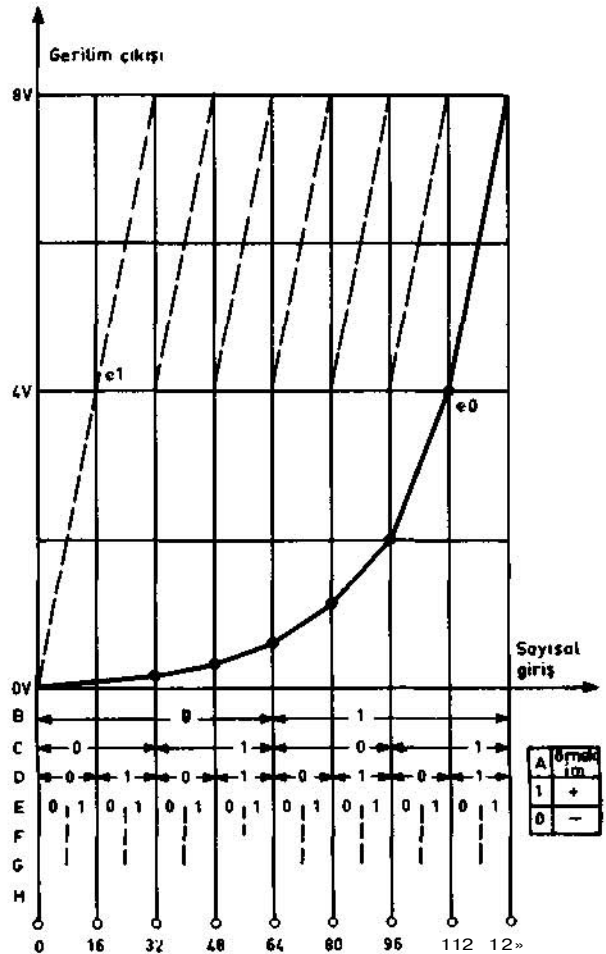
Şekil (3.1)'de e<sub>0</sub> olarak gösterilen eğri S/ö çevirgecin sayısal girişi ile örneksel çıkışı arasındaki bağıntıyı gösterir. 128 sayısal giriş yedi bölümlü bir ikili sayıcıdan elde edilir. Yedi haneli bir sayısal giriş BCDEFGH ile gösterilir. En ağırlıklı üç hane B,C ve D 000,001,010,011,100,101,110,111 birleşimleriyle sekiz dilimi belirler. Bu dilimlerin herbiri içindeki 16 eşit basamak ise, EFGH ile belirlenir. İlk iki

dilimin eğimi aynıdır. Bundan sonraki her dilimin eğimi bir öncekinin iki katıdır.

Şekil 3.2'de öbek çizimi gösterilen sayısalardan örnekselle çevirgeç ardarda bağlı iki bölümden oluşur. Bunlardan birincisinin en az ağırlıklı dört rakkam (E,F,G,H) tarafından belirlenen çıkışı (e<sub>1</sub>), birinci dilim için 0 ile 4V, öbür dilimler için 4V ile 8V arasındadır, e<sub>1</sub> ikinci bölümde BCD ile belirtilmiş dilime göre çeşitli oranlarda güçsüzletilir. Bu devrenin ilk bölümündeki tranzistor anahtarları ve ikinci bölümündeki AET (alan etkili tranzistor; anahtarları kodlayıcı için gereken yüksek hızı sağlar.

### 3.3. Kodlayıcı

Uygulamada kullanılan dizgelerin çoğunda, adımlama ve kodlama işlemleri bir arada, kodlayıcı (encoder) olarak adlandırılan düzende yapılır. Kodlayıcıları çalışma ilkelerine göre üç sınıfta toplayabiliriz. Bunlardan birincisi sayarak kodlama yapan türdendir, tmin anıl değeri içinde en küçük birimden -genel olarak adım- kaç tane ol-



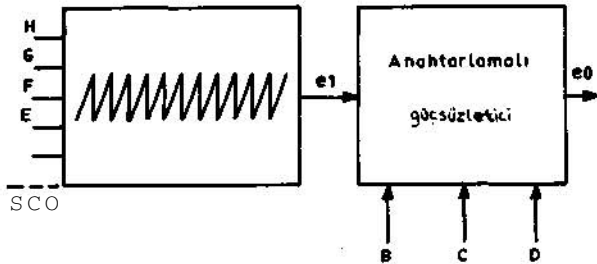
Şekil 3.1. S/ö çevirgecinin giriş-çıkış eğrisi.

duğunu sayarak bulur. Adım düzeyleri sayısı  $m$  ve her işlem için saptama süresi  $t$  ise böyle bir kodlayıcıda enbüyük kodlama süresi  $m \cdot t$  kadardır. Uzun zaman gerektirdiklerinden kullanışlı sayılmazlar. Her keresinde bir adım düzeyine karşılık gelen gerilimi üretip, imin genliğini bununla karşılaştırdıklarından "bir kerede düzey kodlayan" kodlayıcı adını da alırlar. İkincisi koşut kodlayıcılar. Tüm adım düzeylerine karşılık gelen genlik değerleri kodlayıcıda saklı olduklarından çıkışa birlikte verilir ve im genliğinin bunlardan hangisine karşılık geldiği hemen belirlenir. Gerekli kodlama süresi  $t$  kadardır. Çok hızlı çalışırlar. Ancak çok sayıda (adım düzeyleri sayısı kadar) karşılaştırıcı gerektirdiklerinden kullanışsızdırlar. İmin genliğine karşılık gelen kodu hemen bulduklarından bir kerede sözcük kodlayan düzen diye adlandırılırlar. Üçüncü kodlayıcı türü ardışık yaklaşımlarla çalışan yineli yada ağırlıklaştırılmış kodlayıcıdır. Kod kelimesindeki ikili rakamlardan her birini bir karşılaştırma sonunda saptar,  $m$  düzey içeren bir kodlayıcıda kod sözcüğündeki rakam sayısı  $\log m$  dir. Örneğin 128 basamak içeren bir kodlayıcıda kod sözcüğü 7 rakamdan oluşur. Rakamlar sağdan başlayarak ağırlıklaştırılmışlardır. Ağırlıklaştırılma katsayıları (1,2,4,8,16,32,64, vb.) kadardır. Kodlama için gerekli zaman  $t \cdot \log m$  kadardır. Gerekli karşılaştırıcıların sayısı koşut kodlayıcılara göre çok az, kodlama için gerekli zamanda sayıcı kodlayıcılara göre az olduğundan en uygun kodlayıcı türleridir. Bir kerede ikili rakam saptayan kodlayıcı da denebilir. Bu sayılan kodlayıcı türlerinden başka bunların karışımını kullanarak değişik düzenler elde edilebilir.

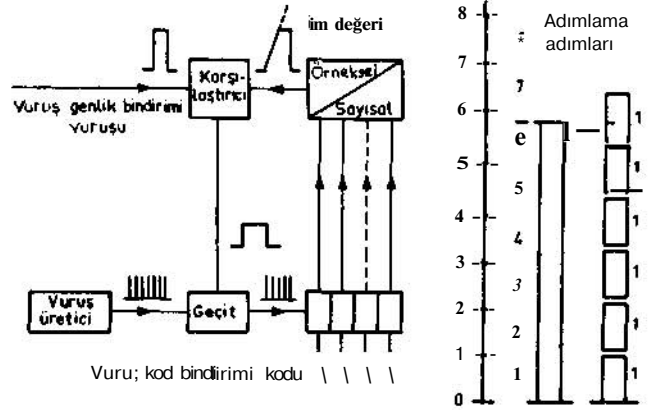
### 3.3.1. Sayıcı türden kodlayıcı

En yalın biçimiyle örneksel imle doldurulmuş bir sığaçtan oluşmuştur.  $T_0$  zamanında örneksel im ortadan kalkmış yani sığacı doldurmuş ve sığaç değişmez akımda boşalmaya başlamıştır.  $T_1$  zamanında gerilimin değeri belli bir eşik değerine varır ve sayma işlemi durur. Örneksel örneğe karşılık gelen sayısal kod, zaman sayıcısındaki bilgilerden 'sod dönüşümü ile elde olunur.

Uygulamada kullanılabilen sayıcı kodlayıcının temel ilkelerini inceleyelim. Burada zaman sayıcı yerine, ikili sayıcının verdiği kodlar örnek genliğini belirleyen kodlardır.

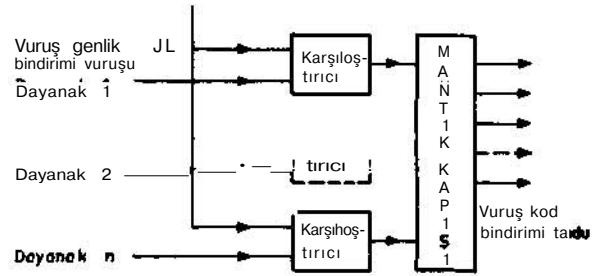


Şekil 3.2. Sayısaldan örneksele çevirgecin öbek çizimi.



Şekil 3.3. Sayıcı kodlayıcı  
a. Temel ilkesi

b. Sayma biçimi



Şekil 3.4. Koşut kodlayıcı.

Vuruş üreticinden alınan vuruşlar geçit devresi üzerinden ikili bir sayıcıya uygulanır. Geçit aynı zamanda karşılaştırıcı tarafından denetlenir. Karşılaştırıcıya, örnek genliğini belirleyen vuruş genlik bindirmeli vuruşlar uygulanır. Sayıcının verdiği kodlar sayısaldan örneksele çevirgeçte örneksel bir ime dönüştürülür, sayısaldan örneksele çevirgecin çıkışı karşılaştırıcıya uygulandığından burada söz konusu çıkış imiyle darbe genlikli bindirme vuruşları vuruş genlik bindirmeli imin genliği ile çevirgeçten uygulanan genlik eşit olduğu anda geçit karşılaştırıcısının denetimi ile kilitlenir ve üretecten ikili sayıcıya başka vuruşların girişi önlenir, ikili sayıcının içeriği olan kodlar örnek genliğini belirleyen kodlardır. Bu im vuruş kod bindirmeli olduğundan dolaysız olarak bundan sonraki kata iletilir. Bu yöntem aynı zamanda sıkıştırma özelliğine kolaylıkla uygulanabilir. Bunun için ya çevirgecin çıkışındaki örneksel im uygun biçimde üretilir, ya belli anlarda sayıcının sayma sıklığı değiştirilir, yada kodlama 12 ikili rakamla birbiçimli olarak yapıлып, sonra 8 koda dönüştürülür.

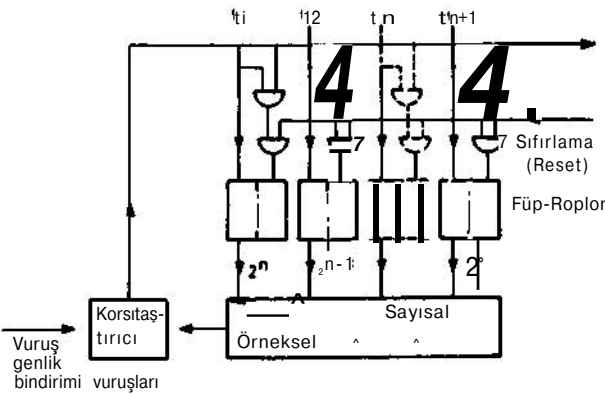
Böyle bir kodlayıcının ilkesi Şekil 3.3a'da gösterilmiştir. Şekil 3.3b'de ise genliği sekiz birim olan bir imin sekiz adımda sayma yöntemi ile kodlanması gösterilmiştir.

### 3.3.2. Koşut türden kodlayıcı

n tane ikili öge içeren bir kod elde etmek için  $2^n-1$  karşılaştırma düzeyi sağlayacak  $2^n-1$  tane karşılaştırıcı gerekir. Örneksel im hepsine birden aynı anda uygulandığında karşılaştırıcıların çıkışları bir mantık kapısında gerekli değişimlere uğrayarak girişe ilişkin kodu verirler. Daha önce söylediğimiz gibi hızlı olmalarına karşılık çok sayıda karşılaştırıcı gerektirmeleri nedeniyle en çok dört, beş ikili öge içeren kodlar için kullanılırlar. Dolaysız kodlayıcı da denir. Girişe örneksel im uygulandığında bağlı karşılaştırma gerilimleri uygulanan girişten daha küçük olan tüm karşılaştırıcılar bir çıkış verirler. Bu çıkışlar istenen ikili kodu elde etmek için mantık matrisinden geçerler. Pahalıdır, çok yer kaplar, harcadığı güç önemli ölçüdedir. Bu nedenlerden ötürü kullanılmağa elverişli değildir. Şekil 3.4'de koşut kodlayıcıya ilişkin bilgiler verilmiştir.

### 3.3.3. Koşut yaklaşımli kodlayıcı

Böyle bir kodlayıcı ilke olarak örneksel karşılaştırıcı, mantık ögelerinden oluşmuş bir küme ve n ikili ögeli sayısaldan örneğe bir kod çözücüyü içerir. Karşılaştırıcının bir girişine  $T_0$  gibi bir zamanda sıfır olan kod çözücünün çıkışı, öbür girişine kodlanacak olan örnek gerilim uygulanır, örnek gerilimin öteki karşılaştırıcı girişinden büyük yada küçük oluşuna göre, örneğin imi artı yada eksidir denir. Birbiriçimli kodlama durumunda,  $T_0$  dan sonra gelen  $T_i$  süresi içinde kod çözücü, kodlanacak en büyük gerilimin yarısına eşit değerde ( $V_{maj}/2$ ) bir gerilim üretir örnek geriliminin bundan büyük yada küçük oluşuna göre elde edilecek ikili eleman (0 yada 1) bellekte saklanır. Örnek gerilimi  $V_{max}/2$  den büyükse bu gerilim yerine kod çözücünden  $V_{max}/2 + VJ^{JJ}/A$  toplamı üretilir, karşılaştırıcıya verilir. Örnek gerilimi  $V_{max}/2$  den küçükse bu gerilim silinir, kod çözücünden  $V_{max}/4$  gerilimi üretilerek karşılaştırıcıya verilir. Herhangi bir örnek gerilimini 7 ikili sayı ile kodlamak istersek kod çözücünden üretilebilecek ge-



Şekil 3.5. Ardışık yaklaşımli (ağırlıklaştırılmış) kodlayıcı.

rilim en küçük değer olarak  $V_{max}/128$ 'e kadar iner. İşlem, kod ögeleri tam olarak elde edilinceye dek sürer. Kod çözücünden ilk üretilen gerilim  $2^{n-1} V_{max}/2$  olduğundan ilk saptanan ikili öge en çok ağırlıklı olan ikili ögedir. Sekiz ögeli bir kodu BCD biçiminde yazdığımızı anımsayacak olursak A örneğin imini, B en ağırlıklı ögeyi B,C,D, sırasıyla daha az ağırlıklı ögeleri belirler. Karşılaştırma sonunda kod sözcüğünün tüm ögeleri karşılaştırma gerilimini denetleyen "flip-flop"lardan elde edilir. Şekil 3.5'te ardışık yaklaşımli bir kodlayıcının ilkesi verilmiştir.

## GİRİŞ

### 1. SAYISAL SÜZGEÇLER HAKKINDA GENEL BİLGİ

Örneksel süzgeçler endükleç, sığaç ve direnç kullanılarak gerçekleştirilirken, sayısal süzgeçlerde çarpma, toplama ve gecikme ögeleri kullanılır.

Bir sayısal süzgeç, örnekler şeklinde çıkış imi vermek üzere örneklendirilmiş giriş imi üzerinde bir algoritma yoluyla iş görür. Bu işlem genel amaç için gerçekleştirilmiş bir hesap makinasında yerine getirilebileceği gibi yalnızca bu belli amaç için bir sayısal devre de yapılabilir.

Sayısal süzgeç kullanılmaktaki amaç sürekli süzgeçtekinin aynıdır; ancak gerçekleştirilme biçimleri birbirinden ayrılır.

Doğrusal sürekli süzgeç kuramı, doğrusal sayısal süzgeç kuramı ise doğrusal fark denklemleri üzerine kurulmuştur. Doğrusal türevsel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümleri kullanıldığı halde, fark denklemlerinin çözümü için Z dönüşümleri elverişlidir.

Bir sayısal süzgeç tasarılamada amaç; çarpma, toplama ve geciktirme işlemlerini sıklık geçirme ve söndürme işlemi yapacak biçimde düzenlemektir.

Bir sayısal süzgecin nasıl çalıştığı hakkında daha iyi bir bilgi vermek için aşağıda basit iki örnek verilecektir.

#### örnek 1.

Önce yukarıda sözü edilen üç işlemi (çarpma, toplama, geciktirme) bir sürekli ime aşağıdaki biçimde uygulayalım:

Sistemin girişi  $e_j(t)$  ise çıkışı

$$e_o(t) = e_i(t) + 0.1e_i(t-T) + a_2e_i(t-2T) \quad (1.1)$$

olsun. Buna göre Laplace dönüşümü yardımı ile (1.1) eşitliğinden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(S) - E(S) (1 + 0.1e^{-sT} + a_2e^{-2sT})$$

$$= 0$$

Buradan da geçiş işlevi

$$H(S) = \frac{M(S)}{E_1(S)} = 1 + a_1 e^{-sT} + a_2 e^{-2sT}$$

olarak bulunur.

Girişteki bir  $f_0$  sıklığının söndürülmesini istersek  $s = j\omega_0$  yazarak geçiş işlevini sıfıra eşitleviz.

Yukardaki geçiş işlevi için bu işlem yapılırsa:

$$1 + \alpha_1 e^{-j\omega_0 T} + \alpha_2 e^{-j\omega_0 2T} = 0$$

Bu karmaşık eşitliğin gerçel ve sanal kısımları sıfıra eşit yazılır:

$$1 + a_1 \cos \omega_0 T + a_2 \cos 2\omega_0 T = 0$$

$$a_1 \sin \omega_0 T + a_2 \sin 2\omega_0 T = 0$$

ve bu denklemlerden  $a_1, a_2$  hesaplanarak

$$a_1 = -2 \cos \omega_0 T$$

$$a_2 = 1$$

bulunur.

O halde  $a_1$  ve  $a_2$  çarpım katsayıları bu eşitlikleri sağlayacak biçimde seçilirse düzenin çıkışında  $f_0$  sıklığı bulunmaz.

Aynı işlemi sayısal olarak gerçekleştirmek istersek (1.1) bağıntısı yerine aşağıdaki bağıntıyı kullanırız.

$$e_o^*(nT) = e_1^*(nT) + a_1 e_1^*(nT-T) + a_2 e_1^*(nT-2T) \quad (1.2)$$

Burada

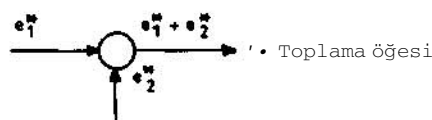
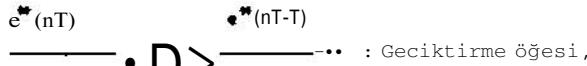
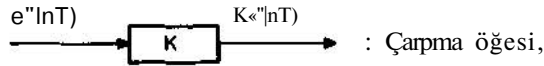
$n$  : bir tam sayı

$T$  : örnek alma dönemi

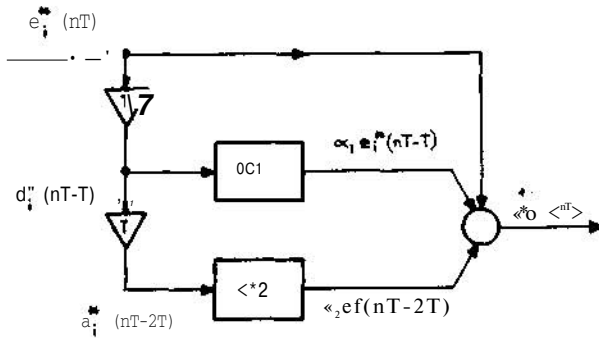
$e^*$  : örneklenmiş ve kodlanmış giriş imidir.

(1.2) bağıntısını gerçekleştiren bir devre Şekil 1.1'de verilmiştir.

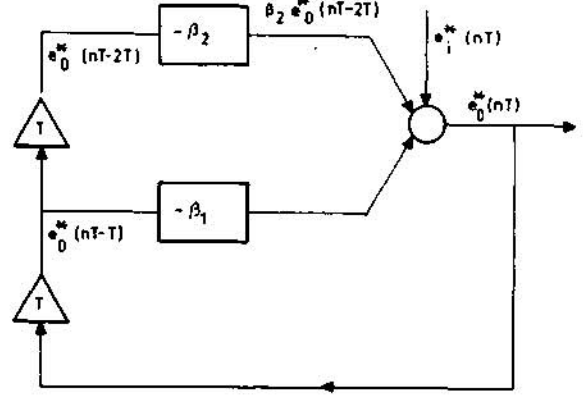
Burada ve bundan sonraki öbek çizimlerde



olarak gösterilmiştir.



Şekil 1.1. (1.2) denkleminin gerçekleştirilmesi.



Şekil 1.2. (1.3)bağıntısı ile verilmiş sayısal süzgeci gerçekleştiren devre.

örnek 2

Örnek 1'deki geçiş işlevinin tersi olan bir geçiş işlevi alalım.

$$H(S) = \frac{E_o(S)}{E_i(S)} = \frac{1}{1 + g_1 e^{-ST} + g_2 e^{-2ST}}$$

Yukarıda yapılabilecek benzer biçimde

$$B_1 = -2 \cos \omega_0 T$$

$$P_{-2} = 1$$

için  $f_p$  sıklığında

payda sıfır olur, yani bu sıklık için kazanç sonsuzdur. Diğer bir deyişle  $s = j\omega_0$  geçiş işlevinin bir kutbudur. O halde örnek 1'dekin tersine bir söndüren süzgeç değil geçiren süzgeçtir. Bu süzgeci gerçekleştiren devre Şekil 1.2'deki gibidir. Giriş ve çıkış imleri arasındaki bağıntının ise aşağıdaki gibi olacağı kolayca görülebilir.

$$e_o^*(nT) = e_1^*(nT) - \beta_1 e_1^*(nT-T) - \beta_2 e_1^*(nT-2T) \quad (1.3)$$

## 2. SAYISAL ve ÖRNEKSEL SÜZGEÇLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Mikroelektronik sayısal devrelerin artan hızları, azalan fiyatları ve küçük boyutları, örneksel devrelerle yapılmasına alışageldiğimiz süzme işlemlerinin sayısal devrelerle gerçekleştirilme olanaklarını daha da artırmaktadır.

Sayısal süzgeçlerle yüksek dereceden kesinliklere ulaşılabilir, ve örneksel süzgeçlerde karşılaşılan bazı gerçekleştirme sorunları ortaya çıkmaz (örneksel devrelerin gerçekleştirilmesinde bazen aksi öğeler gerekebilir, sayısal devrelerde böyle bir sorun yoktur).

Oldukça alçak sıklıklardaki bantlarda (0,01-1Hz gibi) ekonomik olarak gerçekleştirilebilirler ki, bu sıklıklar için örneksel öğelerin boyutları önemli ölçüde büyüktür.

Bu sayılan yararları karşılık, sayısal süzgeçlerde süzme işlevini yerine getirmede, sonlu sözcük uzunluğu (word length) üç tür yanılığa neden olur. Örneklerin adımlanması, süzgeç katsayılarının tam kesin olmaması ve çevirmelerden dolayı yanılıgının birbirine eklenmesi. Bunlar süzgecin çıkışında bir gürültü oluşturan nedenler olarak düşünülebilir.



## SAYISAL SÜZGEÇLER İÇİN GEREKLİ MATEMATİK

### 1. SÜREKLİ BİR İMDEN ÖRNEK ALMADA DİKKAT EDİLECEK NOKTALAR

Sayısal süzme işlemini gerçekleştirmek için giriş imi T aralıklarla alınmış örnekler biçiminde olmalıdır. Bunun için sürekli giriş iminde bulunan en yüksek sıklık bileşeninin döneminin yarısından daha kısa süren bir arayla sürekli girişin örnekleri alınmalıdır. Gösterilebilir ki örneklenmiş imden yeniden örneksel ime geçebilmek için örnek alma aralığı, sözü geçen süreden daha büyük olmalıdır. T aralığı ile alınan örnekler doğrusal sayısal bir koda çevrilir.

Örnek alma ile im zaman ekseninde süresiz duruma getirildikten sonra alman bu örneklerin genlikleri de adımlamak suretiyle süresiz duruma getirilir.

Böylece sınırlı sözcük genişliğinden (word length) başka bir deyişle sınırlı adım sayısından adımlama yanılığısı denilen bir yanılığ ortaya çıkar.

Örnek alma döneminin, örneksel imin sıklık yörüngesindeki en yüksek sıklığa bağlı olduğunu söyledik. Bu dönem ayrıca süzgeç devresinin hızına da bağlıdır. Şöyle ki; devre, bir örneğin girişe gelmesiyle yapmaya başladığı işlemleri, ikinci örnek giriş kapısına geldiğinde bitirmiş olmalıdır. Böylece T örnek alma dönemini süzgeç devresinin hızına da bağlamış olduk.

Görüldüğü gibi sürekli giriş iminin en yüksek sıklık bileşeni, T yi üstten, devrenin hızı ise alttan sınırlar. Şöyle ki;

$f_{max}$  : Sürekli girişteki en yüksek sıklık bileşeni,

$t_j$  : Süzgeç devresinin hızı,

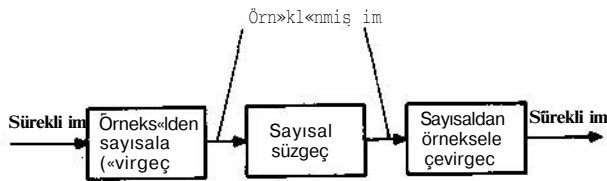
T : Örnek alma dönemi

olmak üzere

$$t_d < T < \frac{1}{2f_{max}}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir.

Ayrıca GİRİŞ bölümündeki Örnek I'de olduğu gibi bir sayısal süzgeçte örnek alma aralığı ile geciktirme öğelerinin geciktirme süreleri aynı tutulur. Sürekli bir imin sayısal olarak nasıl süzlebileceği Şekil 1.1'de görülmektedir.



Şekil 1.1. Bir sayısal süzme işleminin çeşitli adımlarının öbeksel gösterimi.

## 2. SAYISAL SÜZGEÇLERDE KULLANILAN FARK DENKLEMLERİ

### 2.1. m inci Dereceden Doğrusal Fark Denklemi

Tanım: m inci dereceden doğrusal fark denklemi aşağıdaki biçimde yazılan denklemdir.

$$y(nT) = \sum_{i=0}^r L_i x(nT-iT) - \sum_{i=1}^m K_i y(nT-iT) \quad (2.1)$$

Burada

x : Değişken (burada giriş)

y : Bağımlı değişken (burada çıkış)

L<sup>i</sup> : i önceki girişin katsayısı (x(nT-iT)'nin)

K<sup>i</sup> : i önceki çıkışın katsayısı (y(nT-iT)'nin)

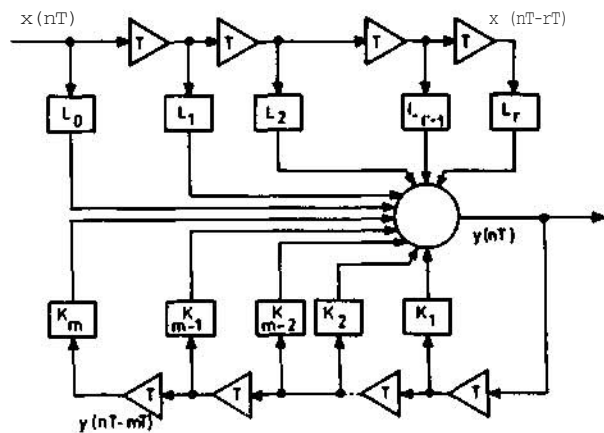
dır.

Görüldüğü gibi "L"ler "x"lerin, "K"lar da "y"lerin katsayılarıdır ve nT anındaki çıkış daha önceki m çıkış değerine ve yine daha önceki r giriş değeri ile "nT" anındaki giriş değerine bağlıdır.

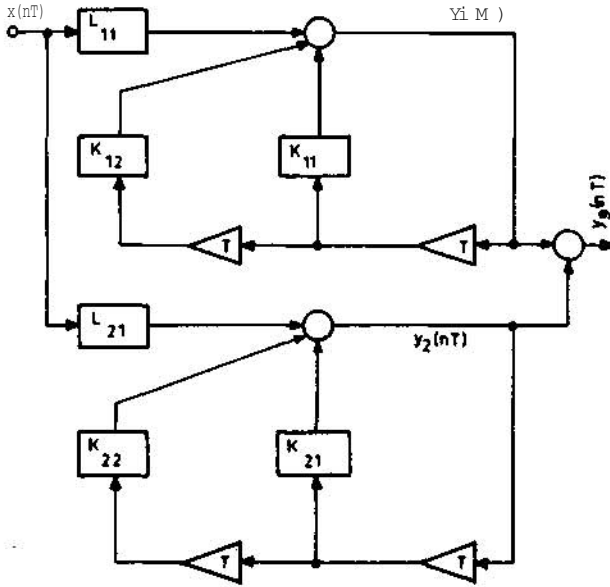
### 2.2. Doğrusal Fark Denkleminin Sayısal Süzgece Geçiş

Gerçek zaman uzayında sayısal olarak süzme işlemi yapmak her yeni örnek için (2.1) denklemini yinlemek demektir. (2.1) denklemini gerçekleştiren bir devre Şekil 2.1'de gösterilmiştir. İstenen bir sayısal süzgecin saptanmasında temel sorun K<sup>i</sup> ve L<sup>i</sup> değişmezlerinin bulunmasıdır.

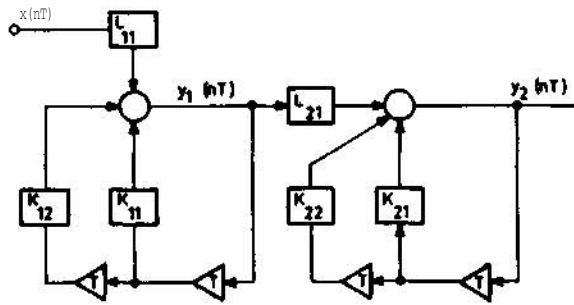
Birçok uygulamalı düzenlerde yalnız birinci ve ikinci derece fark denklemleri kullanılır. Şöyle ki; istenilen süzgeç, bu denklemlere ilişkin yalnız sayısal süzgeçlerin ardarda ve koşul bağlanmaları ile elde edilir.



Şekil 2.1. (2.1) denklemini gerçekleştiren devre.



Şekil 2.3. Fark denklemlerinin koşt düzenlenmesi. (2.3) denklemlerini gerçekleştiren devre.



Şekil 2.2. Fark denklemlerinin seri düzenlenmesi. (2.2) denklemlerini gerçekleştiren devre,

örnek:

$$\begin{aligned} y_1(nT) &= K_{11}y_1(nT-T) + K_{12}y_1(nT-2T) + L_{11}x(nT) \\ y_2(nT) &= K_{21}y_2(nT-T) + K_{22}y_2(nT-2T) + L_{21}y_1(nT) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Yukardaki (2.2) denklemleri bir ardarda düzen oluşturur. Şöyle ki; denklemlerden birincisine değgin  $y_1$  çıkışı ikinci denklemin (yada ikinci denkleme ilişkin devrenin) girişini oluşturmaktadır. Bu denklemleri gerçekleştiren devre Şekil 2.2'de görülmektedir.

Aynı düşünüşle aşağıdaki (2.3) denklemleri de bir koşt düzen oluştururlar (Şekil 2.3).

$$\begin{aligned} y_1(nT) &= K_{11}y_1(nT-T) + K_{12}y_1(nT-2T) + L_{11}x(nT) \\ y_2(nT) &= K_{21}y_2(nT-T) + K_{22}y_2(nT-2T) + L_{21}y_1(nT) \\ y(nT) &= y_1(nT) + y_2(nT) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bu yukardaki (2.2) ve (2.3) denklem takımlarından herbiri dördüncü dereceden tek bir denklem olarak yazılabilirse de, sayısal süzgecin özellikleri

(2.2) ve (2.3) biçiminde yazılmış denklemlerde daha açık olarak görülebilir.

### 3. Z-DÖNÜŞÜMÜ

Burada giriş ve çıkış dizileri  $x(nT)$  ve  $y(nT)$  nin " $n$ "nin sıfırdan küçük değerleri için, sıfır olduğunu varsayacağız. Başka bir deyişle

$$\begin{aligned} x(nT) &= 0 & n < 0 \\ y(nT) &= 0 & n < 0 \end{aligned}$$

varsayılacaktır.

Tanım: Bir  $x(nT)$  dizisinin Z-dönüşümü,  $X(Z)$ ,

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)Z^{-n} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Not: Bir çok diziler için yukardaki (3.1) sonsuz toplamı, yakınsak olur ve kapalı biçimde gösterilebilir.

örnek:

$$x(nT) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases} \text{ için}$$

ise, Z-dönüşümü  $X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n}$  biçimindedir.

$\sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}}$  olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}} \quad |Z| > 1$$

Bu durumda,  $\sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}}$  dizisi için

$$X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}} \text{ dir.}$$

Dönüşüm değişkeni  $Z$  genellikle, karmaşık bir değişkendir ve  $X(Z)$  de bir karmaşık değişkenli işlev olur.

### 4. FARK DENKLEMLERİNDE Z-DÖNÜŞÜMLERİNİN KULLANILMASI

(2.1) biçimindeki bir doğrusal fark denkleminin çözümünde de Z-dönüşümlerinden yararlanılabilir. Bunun için (2.1) denklemini önce aşağıdaki biçimde yazalım.

$$\sum_{i=0}^m K_{iy}(nT-iT) = \sum_{i=0}^r L_{ix}(nT-iT) \quad (4.1)$$

Şimdi (4.1) denkleminin iki yanının Z-dönüşümünü alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m K_{iy}(nT-iT) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} &= \sum_{i=0}^r L_{ix}(nT-iT) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n} \\ \sum_{i=0}^m K_{iy}(nT-iT) \cdot Z^{-n} &= \sum_{i=0}^r L_{ix}(nT-iT) \cdot Z^{-n} \end{aligned}$$

yukardaki dönüşümler (4.1) de yerine konularak

$$\sum_{i=0}^m K_{iy} \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-iT) Z^{-n} = \sum_{i=0}^r L_{ix} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT-iT) Z^{-n} \quad (4.2)$$

elde edilir.

**Teorem:** İT kadar geciktirilmiş  $x(nT-iT)$  dizisinin Z-dönüşümü temel  $x(nT)$  dizisinin Z-dönüşümünün  $Z^{-i}$  ile çarpımına eşittir.

**Kanıt:**

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)Z^{-n}$$

Yukardaki denklemin her iki yanını  $Z^{-i}$  ile çarpılıncaya,

$$X(Z)Z^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)Z^{-(n+i)}$$

elde edilir. Bu denklemin sağ yanında  $n=m-i$  yazarsak,

$$X(Z)Z^{-i} = \sum_{m=i}^{\infty} x(m-iT)Z^{-m}$$

elde ederiz;  $m < i$  ise  $m-i = n < 0$  olur. Daha önce söylediğimiz gibi  $n < 0$  için  $x(nT) = 0$  dır. Böylece (Z) toplamını  $m = i$  yerine  $m = 0$  dan başlatırsak sonuç değişmez; çünkü  $m = 0$  dan  $i-1$  e değin olan m değerleri için  $x(m-iT)$  sıfırdır.

Sonuç olarak  $X(Z)Z^{-i} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT-iT)Z^{-n}$  olduğunu görürüz ki eşitliğin sağ yanını İT kadar geciktirilmiş olan  $x(nT-iT)$  dizisinin Z-dönüşümü, sol yanını ise  $x(nT)$  dizisinin Z-dönüşümünün  $Z^{-i}$  ile çarpılmışıdır.

Bu teorem (4.2) denkleminde kullanılırsa,

$$Y(Z) = \sum_{i=0}^m K_i Z^{-i} X(Z) = \sum_{i=0}^m L_i Z^{-i} \quad (4.3)$$

elde edilir; buradan da

$$Y(Z) = X(Z) \frac{\sum_{i=0}^r L_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^m K_i Z^{-i}} = X(Z) \cdot H(Z) \quad (4.4)$$

bulunur.

## DİZGE İŞLEVINİN İNCELENMESİ

### 1. DİZGE İŞLEVİ ve İRDELENMESİ

Bir önceki bölümdeki (4.4) denkleminde  $Y(Z)$  açık olarak,  $x(nT)$  girişinin Z-dönüşümü ile  $H(Z)$  dizge işlevinin çarpımı olarak belirlenmişti.

Burada dizge işlevi

$$H(Z) = \frac{\sum_{i=0}^r L_i Z^{-i}}{\sum_{i=0}^m K_i Z^{-i}}$$

$Z^{-1}$  değişkeninin kesirsel (rasyonel) bir işlevidir. Ve katsayılar ilk fark denkleminin bir önceki bölümdeki (2.1) in katsayılarından oluşur.

### örnek 1.

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n=0 \text{ için} \\ 0, & n \neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

biçiminde bir dizi seçersek bunun için  $X(Z) = 1$  olur. Böyle bir girişin tepesi  $H(Z)$  in ters Z-dönüşümünden başka bir şey değildir. Çünkü  $Y(Z) = H(Z)$  dir. Bundan ötürü  $x(nT) = 1, 0, 0, \dots$  biçimindeki bir dizi, örneksel süzgeç kuramında birim dürtü " $\delta(t)$ "nin yaptığı işlevi yapar (bildiği gibi  $\{\delta(t)\} = 1$  dir ve yine  $\{1, 0, 0, \dots\}$  dizisinin Z-dönüşümü 1 e eşittir).

### örnek 2.

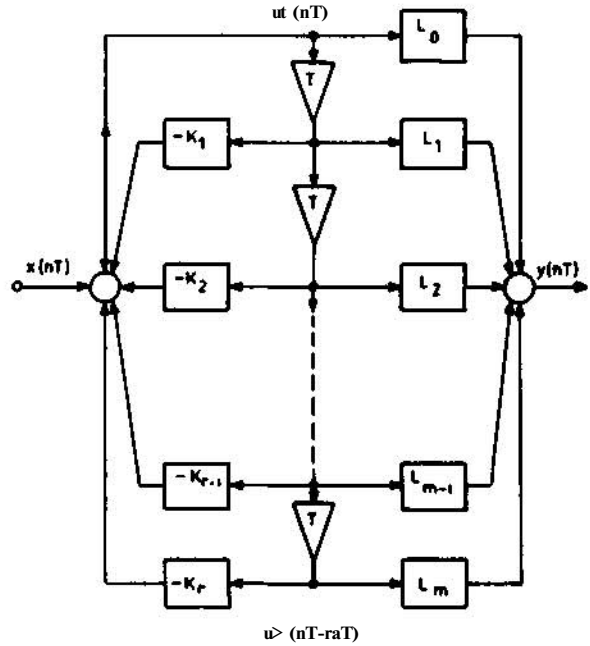
Bir önceki bölümdeki (4.4) denkleminde dayanarak, sayısal süzgecin yine aynı bölümdeki Şekil 2.1' dekinden değişik biçimde gerçekleştirilmesini elde edebiliriz. Bildiğimiz gibi (4.4) denkleminin, Şekil 2'yi veren (2.1) denkleminde Z-dönüşümü olarak elde edilmişti. Şimdi bulacağımız, aynı denklemin gerçekleştirilen başka bir devre olacaktır.

Önce  $w(nT)$  ara dizisine karşılık gelen  $W(Z)$  arasını

$$W(Z) = X(Z) \frac{1}{\sum_{i=0}^m K_i Z^{-i}}, \quad (1.1)$$

$$Y(Z) = W(Z) \sum_{i=0}^r L_i Z^{-i}$$

olarak tanımlarız.



Şekil 1.1. (1.2) denklemlerini  $m > r$  için gerçekleştiren devre.

(1.1) denklemlerinin ters dönüşümleri aşağıdaki gibidir:

$$w(nT) = x(r.T) - \sum_{i=1}^m K_i w(nT-iT) \quad (1.2)$$

$$y(nT) = \sum_{i=0}^r L_i w(nT-iT)$$

Bu denklemlerden giderek Şekil 1.1'deki devre elde edilir. Bu tür devre daha az sayıda geciktirme ögesine gereksinim gösterir ve bu yüzden bazı gerçekler için yeğlenir.

Örnek 3

Giriş imi,  $x(nT) = e^{+jn\omega T}$  biçiminde bir karmaşık üstel dalganın örneklenmiş i olsun.

Bu tür bir giriş için bir önceki bölümdeki (4.1) denklemden elde edilecek sonuç aşağıdaki biçimde gösterilebilecek bir karmaşık üstel dalga olacaktır.

$$y(nT) = F(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T}$$

bu giriş ve çıkışı bir önceki bölümdeki (2.1) denkleminde yerine koyarak,

$$\sum_{i=0}^r K_i F(e^{j\omega T}) e^{j(n-i)\omega T} = F(e^{j\omega T}) \sum_{i=0}^m L_i e^{j(n-i)\omega T}$$

$$\sum_{i=0}^m K_i F(e^{j\omega T}) e^{jn\omega T} e^{-ji\omega T} = F(e^{j\omega T}) \sum_{i=0}^m L_i e^{jn\omega T} e^{-ji\omega T}$$

$$\sum_{i=0}^m K_i y(nT) e^{-ji\omega T} = F(e^{j\omega T}) \sum_{i=0}^m L_i x(nT) e^{-ji\omega T}$$

buluruz.

Bu son denklemden  $\frac{y(nT)}{x(nT)}$  çözersek

$$\frac{y(nT)}{x(nT)} = \frac{\sum_{i=0}^r K_i e^{-ji\omega T}}{\sum_{i=0}^m L_i e^{-ji\omega T}} = H(e^{j\omega T}) \quad (1.3)$$

elde ederiz ki, bu gösterim  $H(Z)$  dizge işlevinde  $Z = e^{j\omega T}$  konularak elde edilen gösterime eşittir.

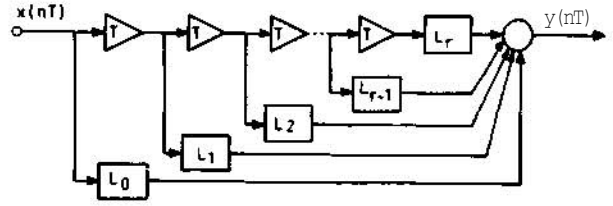
(1.3) denkleminde örneksel düzenlerdeki geçiş işlevlerinde  $s = j\omega$  konulduğunda elde edilen denkleme karşılık gelir. Bu sonuçtan, sıklık uzayındaki incelemelerde yararlanabiliriz.

## 2. SAYISAL SÜZGEÇLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bir sayısal süzgecin giriş ve çıkış imlerinin arasındaki bağıntısının,

$$y(nT) = \sum_{i=0}^r L_i x(nT-iT) - \sum_{i=1}^m K_i y(nT-iT)$$

fark denkleminin ile verildiğini ve bu denklemlerden giderek ve Z-dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki



Şekil 2.1. Yineli olmayan bir sayısal süzgeci gerçekleştiren devrenin öbek çizimi.

biçimde bir sayısal geçiş işlevi elde edilebileceğini gördük:

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{i=0}^r L_i Z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^m K_i Z^{-i}} \quad (2.1)$$

Tanım 1:  $L^r$  ve  $K^m$  katsayılarından en az birer tanesi sıfırdan değişik ise, (2.1) dizge işlevi ile verilmiş olan sayısal süzgeç "yinelidir" (recursive) denir.

Yineli süzgeçte çıkış, yalnız şimdiki ve daha önceki "r" tane girişe bağlı olmayıp aynı zamanda daha önceki "m" çıkış değerine bağlıdır. Böyle bir süzgecin öbek çizimi Şekil 1.1'de gösterilmiştir.

Tanım 2: Yukardaki (2.1) geçiş işlevinde bütün  $K_i$  değerleri sıfır ise, buna ilişkin sayısal süzgeç yineli olmayan sayısal süzgeç denir.

Böyle bir süzgeç Şekil 2.1'de gösterilmiştir.

Bu tanımlanan iki tür sayısal süzgeçten, yineli olmayanların sınırlı bir belleği vardır ve çok iyi evre özellikleri verebilirler. Buna karşılık keskin bir geçiş bandı istendiği zaman çok sayıda ögeye gereksinirler. Diğer tür yani yineli olanlar ise tam karşıt özellikler gösterirler. Az sayıda ögeyle keskin geçiş bandı verir, buna karşılık kötü evre özelliği vardır ve sınırsız bir belleği bulunur.

## 3. Z-UZAYINDA DİZGE İŞLEVLERİNİN İNCELENMESİ

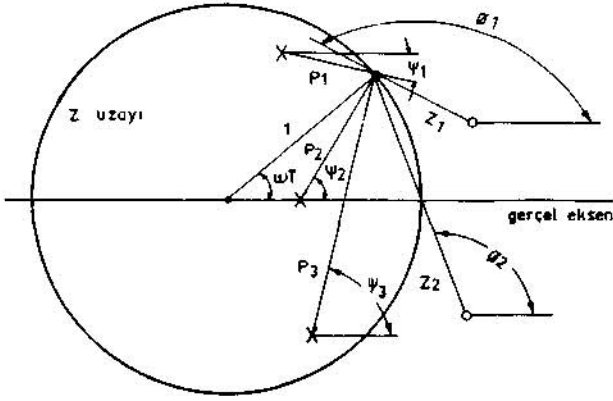
Bu bölümün 1 no'lu alt bölümünde  $H(Z)$  nin sıklık tepkesi olan bir işlev olarak ele alınabileceğini gördük. Bunun için  $Z = e^{j\omega T}$  koyarız, bu da karmaşık Z-uzayında birim çember üzerinde bulunan noktalara karşılık gelir.

Dizge işlevi  $H(Z)$  kesirsel bir işlev olduğundan, değişmez bir çarpan farkı ile sıfırları ve kutupları türünden tek olarak gösterilebilir. Buna göre karmaşık uzayda  $H(Z)$  nin sıfırları ve kutupları gösterilirse, herhangi bir Z değeri için  $H(Z)$  geometrik olarak Şekil 3.1'deki gibi hesaplanabilir.

Bir o sıklığına süzgecin göstereceği tepke şu biçimde bulunur:

Önce  $Z = e^{j\omega T}$  noktasını karmaşık uzayda belirleriz. Birim çember üzerindeki bu noktanın kutuplara olan uzaklıklarını  $P1.P2.P3...$ ; sıfırlara olan uzaklıklarını ise  $Z1.Z2.Z3...$  ile gösteririz. Bu durumda;

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{P1P2P3...}{Z1Z2Z3...}$$



Şekil 3.1.  $H(e^{-j\omega T})$  nin geometrik olarak hesaplanması.

olur (Şekil 3.1).  $H(e^{-j\omega T})$  nin evresi ise; sıfırları,  $Z = e^{j\omega T}$  noktasına birleştiren evreçlerin gerçel eksenle yaptıkları açıların toplamından, kutupları bu noktaya birleştiren evreçlerin gerçel eksenle yaptığı açıların toplamının çıkarılmasıyla elde edilir.

$$\angle H(e^{-j\omega T}) = \phi_1 + \dots - (\psi_1 + \psi_2 + \dots)$$

Yukarda anlatılanlar Şekil 3.1'de üç kutup ve iki sıfır için gösterilmiştir.

Sürekli süzgeçler incelenirken sıklık, S uzayında sanal eksen üzerinde ölçülürken, burada Z uzayında birim çemberin çevresi boyunca ölçülmektedir.

Birçok düzenlerde birinci ve ikinci derece fark denklemlerinin kullanılmasını daha önce söylemiştik. Şimdi bunlara ilişkin sıklık tepkisi işlevlerini örnek olarak çıkartalım.

#### örnek 1.

Ele alınan fark denklemi aşağıdaki gibi birinci dereceden bir fark denklemi olsun

$$y(nT) = Ky(nT-T) + x(nT)$$

Buna ilişkin sayısal geçiş işlevi

$$H(Z) = \frac{1}{1 - KZ^{-1}}$$

biçimindedir. Sıklık tepkisi için  $Z = e^{j\omega T}$  yazarak

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - Ke^{-j\omega T}} = \frac{1}{1 - K(\cos\omega T) - j\sin\omega T}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - K\cos\omega T)^2 + K^2\sin^2\omega T}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + K^2 - 2K\cos\omega T}} \end{aligned}$$

$$\phi = \angle H(e^{j\omega T}) = -\arctg \frac{\sin\omega T}{1/K - \cos\omega T}$$

olarak bulunur.

#### Örnek 2.

Şimdi de ikinci derece denklemi ele alalım:

$$y(nT) = Ky(nT-T) + K_2y(nT-2T) + x(nT)$$

yukardaki denklemin dizge işlevi,

$$H(Z) = \frac{1}{1 - K_1Z^{-1} - K_2Z^{-2}}$$

dir.  $Z = e^{j\omega T}$  yazarsak,

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - K_1(\cos\omega T - j\sin\omega T) - K_2(\cos 2\omega T - j\sin 2\omega T)}$$

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega T})| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - K_1\cos\omega T - K_2\cos 2\omega T)^2 + (K_1\sin\omega T + K_2\sin 2\omega T)^2}} \end{aligned}$$

$$\phi(e^{j\omega T}) = -\arctg \frac{K_1\sin\omega T + K_2\sin 2\omega T}{1 - K_1\cos\omega T - K_2\cos 2\omega T}$$

bulunur.  $H(Z)$  nin kutupları ise, paydayı sıfıra eşitleyerek

$$1 - K_1Z^{-1} - K_2Z^{-2} = 0$$

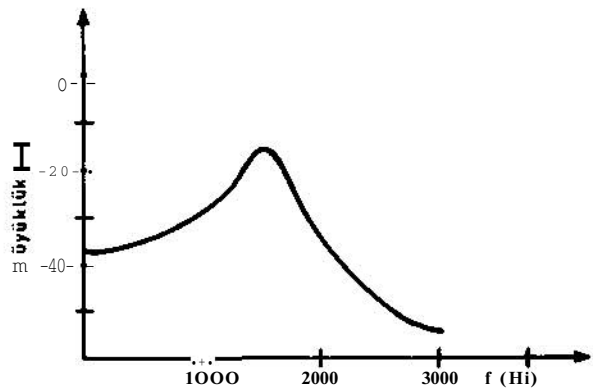
$$Z^2 - K_1Z - K_2 = 0$$

$$P_{1,2} = \frac{K_1}{2} \pm \sqrt{\frac{K_1^2}{4} + K_2}$$

olarak bulunur.  $K_1^2/4 + K_2 < 0$  olursa kutuplar karmaşık eşlenik olur. Ve birim çembere yaklaştıkça özsalınım duyulmaya başlar (Şekil 3.2).

$Z = e^{j\omega T}$  kutuplara yaklaştıkça, genlik işlevi  $|H(e^{j\omega T})|$ 'nin sıklıkla değişimi bir sürekli devreninkine benzemeye başlar. Yalnız burada, genliğin ve evrenin  $\omega T$ 'ye göre dönemsel olduğuna dikkat edilmelidir.

Herhangi bir kanıta girişmeden söyleyebiliriz ki kararlılığın sağlanması için  $H(Z)$  nin bütün kutupları birim çemberin içinde bulunmalıdır. Ayrıca kutuplar ve sıfırlar gerçel eksen üzerinde bulunmalı yada karmaşık eşlenik çiftler biçiminde olmalıdırlar.



Şekil 3.2. Bir sayısal özsalımgacın sıklık özeliği.

## SAYISAL SÜZGEÇLERİN TASARIMLANMASI

### 1. DÜRTÜ TEPKESİNİ DENKLEŞTİRME YÖNTEMİ (IMPULSE INVARIANCE)

Sayısal süzgecin tasarımı sırasında önce örneksel bir süzgecin geçiş işlevi bulunur, sonra sayısal süzgecin dizge işlevine geçilir.

Çıkış noktamız, aradığımız sayısal süzgecin  $x(nT) = 1, 0, 0, \dots$  biçiminde bir girişe göstereceği tepkenin, benzerliğini istediğimiz örneksel süzgecin bir dürtü  $\delta(t)$  girişine göstereceği sürekli tepkenin örneklemeğine eşit olmasıdır.

Bu durumda geçiş işlevi verilmiş bir örneksel süzgeç ile arasında yukarıda sözünü ettiğimiz denklik (benzerlik) bulunan sayısal süzgeci kuracağız.

Sürekli bir süzgecin birim dürtü tepkisi  $f(t)$ , geçiş işlevi  $F(s)$  nin ters Laplace dönüşümü olarak belirlenir.  $F(s)$ .

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + s_i}$$

biçiminde verilmiş olsun. Bu durumda  $f(t)$  aşağıdaki gibidir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + s_i} \right\} = \sum_{i=1}^m A_i e^{-s_i t}$$

Sayısal süzgecin geçiş işlevi  $H(Z)$  nin ters Z-dönüşümü olarak belirlenen  $h(nT)$  dürtü tepkesinin,  $f(t)$ 'nin örneklemeğine eşit olmasını istiyoruz:

$$h(nT) = f(t) \Big|_{t = \dots, T, 2T, \dots}$$

öyleyse:

$$h(nT) = \sum_{i=1}^m A_i e^{-s_i nT}$$

olur. İki yanında Z-dönüşümünü alırsak,

$$H(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) Z^{-n} = \sum_{i=1}^m A_i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s_i nT} Z^{-n}$$

buradan da

$$H(Z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - e^{-s_i T} Z^{-1}}$$

elde edilir. Böylece, geçiş işlevi  $F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + s_i}$

olan bir örneksel süzgece geçiş işlevi

$$H(Z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - e^{-s_i T} Z^{-1}}$$

olan bir sayısal süzgeç karşılık gelmektedir. Buradaki  $A_i$  ve  $s_i$  değişmezleri  $F(s)$  nin birlikte verilmiştir. Bu yöntemde elde edilen ilişki,

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + s_i} \xrightarrow{T} H(Z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - e^{-s_i T} Z^{-1}} \quad (1.1)$$

biçimindedir.

Uyarı: Eğer örneksel süzgecin sıklık özeliği örnek alma sıklığının yarısından daha yukarı sıklıklara değin sıfır olmadan süregidiyorsa, sayısal süzgecin sıklık tepkisi, ilgili sürekli süzgecin sıklık tepkesinden önemli ölçüde değişik olabilir. Bu durum Şekil 1.1'de görülmektedir.

örnek 1

Bir kutuplu alçak geçiren RC süzgeci ile buna karşılık gelen sayısal süzgeci karşılaştıralım. Sözü geçen örneksel süzgecin geçiş işlevi,  $F(s)$  ve sayısal süzgecin dizge işlevi,  $H(Z)$  aşağıdaki gibidir.

$$F(s) = \frac{a}{s + a} \quad H(Z) = \frac{a}{1 - e^{-aT} Z^{-1}}$$

Örnek alma sıklığı 1 Hz olsun; buna göre iki süzgecin sıklık tepkeleri Şekil 1.1'dek gibidir.

Görüldüğü gibi sürekli süzgeç ile sayısal süzgeç arasında denkliğin tam olması yukarıdaki koşula bağlıdır.

örnek 2

Sayısal Lerner süzgeci

$$F(s) = \sum_{i=1}^m \frac{B_i (s+a)}{(s+a)^2 + b^2}$$

$$B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_m = \frac{(-1)^m}{2}$$

$$B_i = (-1)^{i+1}, \quad i = 2, \dots, m-1$$

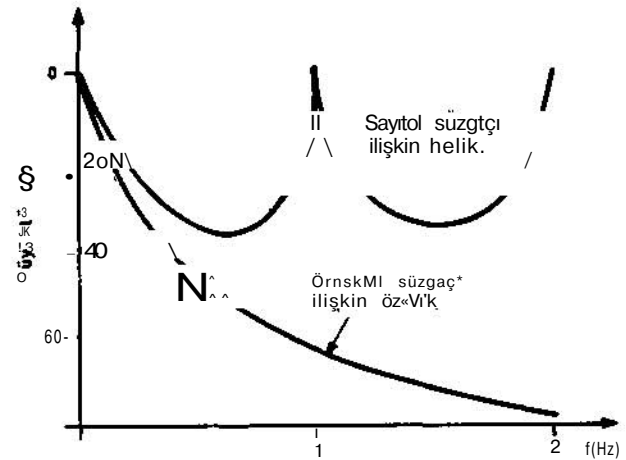
geçiş işlevi ile belirlenmiştir.

Lerner süzgecinin yüksek dereceden evre doğrusallığı ve iyi bir bant geçirme özeliği vardır.

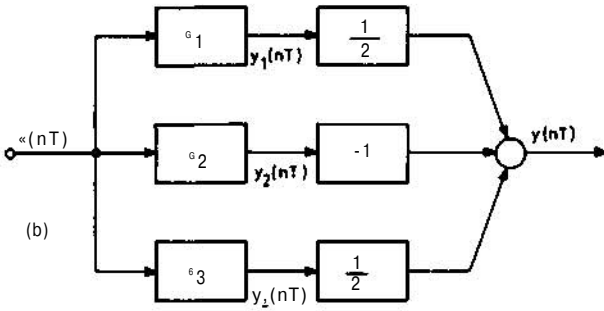
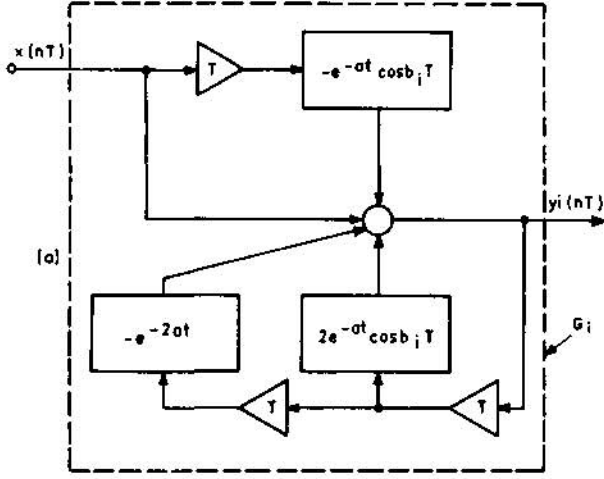
(1.1) ilişkisinden

$$H(Z) = \sum_{i=1}^m \frac{B_i \{ 1 - e^{-aT} (\cos bT) Z^{-1} \}}{1 - 2e^{-aT} (\cos bT) Z^{-1} + e^{-2aT} Z^{-2}}$$

yazılabilir.  $m = 3$  için bir gerçeklemeye gidersek.,



Şekil 1.1. Bir kutuplu sayısal ve örneksel süzgeçlerin sıklık özellikleri.



Şekil 1.2.a. "G" öbeklerinin gerçekleştirilmesi  
b. 3. dereceden sayısal Lerner süzgecinin gerçekleştirilmesi.

her terimi aşağıdaki fark denklemi ile hesaplanan bir yf çıkış bileşeni verir.

$$y_i(nT) = e^{-aT} (\cos b_1 T) \{ 2y_i(nT-T) - x(nT-T) \} - e^{-2aT} y_i(nT-2T) + x(nT)$$

çıkış ise "i=1,2,3" için elde edilen  $y_1, y_2, y_3$ 'ün uygun biçimde koşut olarak bağlanması ile elde edilir. Gerçekleşme Şekil 1.2'de gösterilmiştir.

## 2. SAYISAL ÖZSALINGAÇLAR (REZONATÖRLER)

(1.1) ilişkisine dayanarak sayısal özsalıngaçlar (rezonatörler) belirlenebilir. Fakat uygulamada sayısal özsalıngaçlar, sürekli özsalıngaçlara başvurulmadan belirlenirler.

Bilindiği gibi  $Z = re^{j\omega T}$  kutupları ve  $Z=q$  sıfırı olan bir özsalıngaçın dizge işlevi

$$H(Z) = \frac{1 - qZ^{-1}}{1 - Zr(\cos u_0 T)Z^{-1} + r^2 Z^{-2}} \quad (2.1)$$

olacaktır; buradan sıklık tepkesinin genliği hesaplanırsa

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{\sqrt{\{1 + r^2 - 2rcos(\omega J - u_0)T\} \{1 + r^2 - 2rcos(\omega H - u_0)T\}}} \quad (2.2)$$

bulunur. Yukarıda yaptığımız gibi, bu belirleme karmaşık eşlenik kutupların ve birçok durumda, bir de sıfırın seçilmesi ile olur. Bunlardan fark denklemi ve dizge işlevi kolayca elde edilebilir.

a) 2.1 gösteriminde  $q = \cos u_0 T$  alınırsa  $u = u_0$  özsalınım sıklığında ve  $r$  nin bire çok yakın olduğunu düşünerek uygun yaklaşıklıklarla, (2.2) aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{1}{2(1-r)/T}$$

Görüldüğü üzere genlik (kazanç)  $\omega_0$ 'dan bağımsız olur. Böylece  $q = \cos u_0 T$  seçerek  $\omega_0$  sıklık bölgesinin neresinde bulunursa bulunsun kazanç değişmeyen özsalıngaçlar yapmak olanağını elde ederiz.

$r$  1'e çok yakın olduğu için özsalınım sıklığındaki kazanç önemli düzeyde olacaktır. Süzgecin kazançını bilmek, taşma olmayacak biçimde sözcük uzunluğunu (word length) seçmek gerekir.

b)  $q=1$  seçersek  $0 = 0$  için genlik sıfır olur (doğru akım için).

c)  $q=0$  için  $H(Z)$ 'de sıfır ortadan kalkar ve doğru akımdaki kazanç  $u_0$ 'dan bağımsız olur.

## 3. SAYISAL SÜZGEÇLERİN DİZGE İŞLEVİ GENLİĞİNİN KARESİNDEN SAPTANMASI

Ahışlagelmiş süzgeç hesabında, Butterworth ve Çebişef süzgeçleri, aşağıda verilen (3.1) ve (3.2) denklemlerinden istediğimiz koşullara uygun olanı seçilerek saptanır.

$$|F_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \quad (3.1)$$

$$|F_T(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + E^2 V^2 \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\frac{2}{n}}} \quad (3.2)$$

$$V_j(x) = x ; \quad V_2(x) = 2x^2 - 1 ;$$

$$V_{n+1}(x) - 2xV_n(x) + V_{n-1}(x) = 0$$

Aynı yol sayısal süzgeçler için de izlenebilir. Daha önceki bölümde  $H(Z)$ 'in  $Z^{-1}$ 'in bir kesirsel işlevi olduğunu söylemiştik.  $Z$ 'nin birim çember üzerindeki değerleri için de,  $H(e^{j\omega T})$ ,  $e^{j\omega T}$ 'nin kesirsel işlevi olacaktır. 0 halde,  $|H(e^{j\omega T})|^2$ , "a)T" li iki trigonometrik işlevin oranı olarak gösterilebilir. Alçak geçiren süzgeçler için uygun iki büyüklüğün karesi biçimindeki iki denklem aşağıda verilmiştir.

$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{1}{1 + \frac{tg^{2n}(u)T/2}{tg^{2n}(u_0 T/2)}} \quad (0.3)$$

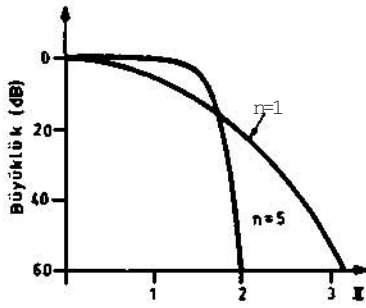
$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\sin^{2n}(\omega T/2)}{\sin^{2n}(u_c T/2)}} \quad (3.4)$$

(3.3) ve (3.4) deki işlevlerden elde edilen eğriler, Butterworth süzgeci için elde edilene çok benzer (Şekil 3.1 ve 3.2).  $u_c$  kesim sıklığı ise sürekli durumdaki ile aynı işlevi görür.

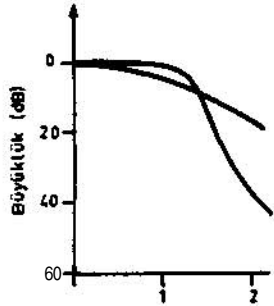
(3.3) denkleminde  $\text{tg} \cdot (\omega T/2)$  yi,  $e^{j\omega T}$  türünden yazarsa sonra  $e^{j\omega T}$  yerine  $Z$  koyarsak:

$$|H(Z)|^2 = \frac{\text{tg}^{2n} \frac{\omega_c T}{2}}{\text{tg}^{2n} \frac{\omega_c T}{2} + (-1)^n \left( \frac{Z-1}{Z+1} \right)^{2n}} \quad (3.5)$$

elde ederiz. Bu denklemin  $Z = -1$ 'de  $2n$  katlı sıfırı olduğu görülür; kutuplarını bulmak için ise:



Şekil 3.1.  
(3.3) biçimindeki bir denklemden elde edilecek sayısal süzgecin sıklık özeliği



Şekil 3.2.  
(3.4) işlevinden elde edilecek bir sayısal süzgecin vereceği sıklık özeliği

dönüşümünü kullanırız. Bu durumda kutupları bulmak, bir Butterworth süzgecininkilerini bulmaya dönüşmüş olur.

$P$  olarak kutuplar  $p = x + jy$ ,  $Z$  olarak ise  $Z = u + jv$  biçiminde olsun.  $Z$ 'in gerçel ve sanal bileşenleri aşağıdaki ters dönüşümden giderek

$$Z = \frac{1+P}{1-P} \quad (3.6)$$

$x$  ve  $y$  türünden hesaplanırsa şu denklemler elde edilir:

$$u = \frac{1-x^2-v^2}{(1-x)^2+y^2} ; v = \frac{2y}{(1-x)^2+y^2} \quad (3.7)$$

Şimdi kutupların geometrik gösterilimini düşünelim:  $P$  uzayında elde edilen kutuplar, Butterworth süzgecinde anımsayacağımız üzere, özeği (merkezi) sıfır noktasında olan ve  $\text{tg} \omega_c T/2$  yarıçaplı çember üzerinde düzgün olarak yerleşmiştir. Bu çemberin denklemi

$$X^2 + y^2 = \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2} \quad (3.8)$$

olacaktır. (3.7) ve (3.8) denklemlerinden giderek  $p$  uzayındaki Bu dairenin  $Z$  uzayında yine bir çember meydana getireceği gösterilebilir ve  $Z$  uzayındaki bu çemberin odağının özboyutlarının ve yarıçapının gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$U_c = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}} = \text{sec} \omega_c T ; v_c = 0 \quad (3.9)$$

$$P = \frac{2 \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}} = \text{tg} \omega_c T$$

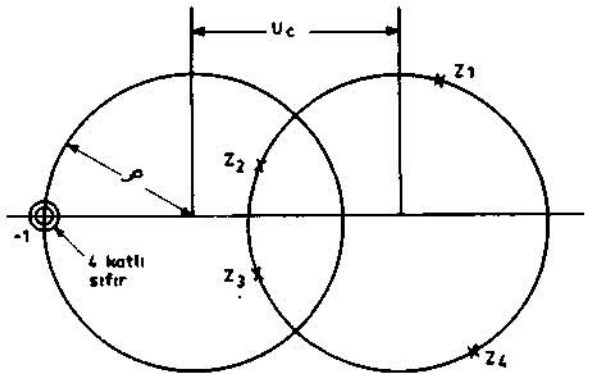
Genel olarak  $p$  uzayındaki kutupların  $x$  ve  $y$  bileşenleri hesaplanır ve (3.7) denklemlerinde yerine konursa,  $Z$ 'nin gerçel ve sanal bileşenlerinin genel gösterimi elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}}{1 - 2 \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2} \cos \frac{m\pi}{n} + \text{tg}^4 \frac{\omega_c T}{2}} \\ V_m &= \frac{2 \text{tg} \frac{\omega_c T}{2} \sin \frac{m\pi}{n}}{1 - 2 \text{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2} \cos \frac{m\pi}{n} + \text{tg}^4 \frac{\omega_c T}{2}} \end{aligned} \right\} m = 0, 1, \dots, 2n-1$$

Yukardaki denklemlerde  $m = 0, 1, \dots, 2n-1$ 'dir. Ayrıca denklemler  $n$ :tek için geçerlidir,  $n$ :çift ise  $m/n$  yerine  $(2m+1)/2n$  koymak gerekir.

Şekil 3.3'te sıfır ve kutuplar  $(\omega_c T) = \pi/4$  ( $p = 1$ ) ve  $n = 2$  için geometrik olarak gösterilmiştir.

Sıfırları ve kutupları bulduktan sonra  $|H(e^{j\omega T})|^2$  işlevi bunlarla belirlenmiş olur. Doğaldır ki,  $(e^{j\omega T})!$ 'nin gösteriminde sadece birim daire içinde kalan karmaşık eşlenik kutuplar gelecektir.



Şekil 3.3. (3.5) denklemini ile verilen süzgecin, büyüklüğünün karesinin sıfır ve kutuplarının geometrik olarak gösterilişi ( $p=1$ ,  $n=2$  alınmıştır).



Eğer genlik karesi gösterimi

$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_n^2 \left\{ \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}} \right\}^2} \quad (3.10)$$

olarak seçilirse aynen (3.3) denklemi için yaptığımız gibi davranılır.  $P = (Z - 1)/(Z + 1)$  dönüşümü ile  $p$  uzayında bulunan kutuplar, Çebişef süzgecinde olduğu gibi bir elips üzerindedir. Bir elips üzerine dizilmiş bu kutuplardan giderek  $Z$  uzayında elde edilen kutuplar ise yürekbiçimli (kardioit) bir eğri üzerinde bulunurlar,  $p$  uzaydaki ve  $Z$  uzayındaki kökler hesaplanırsa aşağıdaki bileşenler bulunur.

$$x = \operatorname{atg} \frac{\omega_c T}{2} \cos \theta$$

$$y = \operatorname{btg} \theta - \sin \theta$$

$$u = \frac{2(1 - \operatorname{atg} \frac{\omega_c T}{2} \cos \theta)}{(1 - \operatorname{atg} \frac{\omega_c T}{2} \cos \theta) + b^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{\omega_c T}{2} \sin \theta} - 1$$

$$v = \frac{2 \operatorname{btg} \theta - \sin \theta}{(1 - \operatorname{atg} \frac{\omega_c T}{2} \cos \theta)^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{\omega_c T}{2} \sin^2 \theta}$$

$$b, a = \frac{1}{2} \left\{ (\sqrt{\epsilon^{-2} + 1} + \epsilon^{-1})^{1/n} \pm (\sqrt{\epsilon^{-2} + 1} + \epsilon^{-1})^{-1/n} \right\}$$

#### 4. SAYISAL SÜZGEÇ İŞLEMLERİNİN ÇİFDÖĞRUSAL DÖNÜŞÜMLER KULLANARAK BELİRLENMESİ

Yukarda görülen durumlarda  $p = (Z - 1)/(Z + 1)$  dönüşümünü yapmakla, sayısal süzgecin hesaplanması da çözülmüş bulunan bir alışlagelmiş süzgeç sorununun çözümüne indirgenmiş olur. Örneğin (3.3) ve (3.10) un kutuplarını bulmak daha önce çözülmüş bulunan örneksel Butterworth ve Çebişef süzgeçlerinin kutuplarını bulmaya dönüşmüştür.

Bu bizi sayısal süzgeçlerin düzenlenmesinde yeni bir yönteme götürmektedir, bu doğrudan doğruya  $s$  uzayını kullanarak hesaplanmaktadır.

$H(s)$  ile verilmiş bir örneksel süzgecimiz olsun; bunun sıklık tepkesi,  $s$  ye sanal eksen boyunca değerler verilerek bulunur. Yine bildiğimiz gibi bir sayısal süzgecin sıklık tepkesi ise dizge işlevinde  $Z$  ye özeği sıfır noktasında olan birim çember üzerinde değerler vererek bulunur.

Bu durumda  $H(s)$  de  $s$  yerine  $Z$  nin öyle bir kesirsel işlevini koyalım ki  $s$  uzayındaki sanal eksen  $Z$  uzayındaki birim çember üzerine düşsün.

Böylece elde edilecek  $H'(Z)$  nin,  $Z$  birim çember üzerinde gezdirildikçe, vereceği değerler,  $H(s)$  nin,  $s$  sanal eksen üzerinde kaydırıldıkça, alacağı değerlere eşittir.

Böyle kesirsel yalın bir işlev aşağıdakidir.

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (3.11)$$

Uyarı: Kararlı  $H(s)$  süzgecinin yine kararlı bir sayısal süzgeç vermesi için bu dönüşümde olduğu gibi  $s$  uzayının sol yarısının  $Z$  düzleminde birim çember içine dönüşmesi gerekir.

(3.11) dönüşümüne göre  $Z = e^{j\omega_c T}$  ye karşılık gelen  $s$  değerini bulalım. Bunun için (3.11) de  $Z = e^{j\omega_c T}$  yazalım.

$$s = \frac{e^{j\omega_c T} - 1}{e^{j\omega_c T} + 1} = \frac{e^{j\frac{\omega_c T}{2}} - e^{-j\frac{\omega_c T}{2}}}{e^{j\frac{\omega_c T}{2}} + e^{-j\frac{\omega_c T}{2}}} = j \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2}$$

$$s = j\omega_A = j \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \quad (3.12)$$

0 halde  $Z = e^{j\omega_c T}$  ye  $s = j\omega_A$  karşılık gelmektedir.

Sonuç: Sayısal süzgecin  $\omega_c$  sıklığına göstereceği tepke, süzgecin

$$\omega_A = \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \quad (3.13)$$

sıklığına göstereceği tepkeye eşittir.

Yukardaki (3.11) ve (3.13) denklemlerine dayanarak şöyle bir yöntem geliştirebiliriz.

- 1) Gerçekleştirilmesi istenen sayısal süzgecin,  $\omega_c$  dönüşül sıklıklarına karşılık gelen  $\omega_A$  sıklıkları (3.13) denkleminde elde edilir (süzgeç bandının alt ve üst sıklıkları, en çok söndürülmesi istenen sıklık vb.).
- 2) Sayısal süzgeçten istenen özellikler ve yeni  $\omega_A$  sıklıklarına uygun olarak, bir  $H(s)$  geçi; işlevi düzenleriz (Bildirdiğimiz örneksel süzgeç yöntemleri ile).

(3.11) dönüşümü  $s$  uzayındaki sanal eksen  $L$  uzayındaki birim çember üzerine düşüren tek işlev değildir. Aynı işi görece başka bir işlev de

$$s = \frac{Z - 2Z \cos \omega_c T + 1}{Z^2 - 1} \quad (3.14)$$

dir.

**Biraz önce yapılan benzer biçimde gösterilebilir ki, sayısal süzgecin  $\omega_c$  sıklığına göstereceği tepke,**

$$\omega_A = \frac{\cos \psi_0 T - \cos \theta_0 T}{\sin \psi}$$

örneksel süzgecin sıklığına göstereceği tepkeye eşittir.

(3.15) ten görülür ki, (3.14) işlevi alçak geçiren  $H(s)$  yi bant geçiren  $H'(Z)$  ye dönüştürmektedir. 0 halde (3.14) denklemi bant geçiren sayısal süzgeçler tasarlamak için aşağıdaki gibi kullanılabilir.

- 1) Bir  $\omega_c$  orta sıklığı seçilir, yada bu sıklık, süzgecin özellikleri arasında verilmiş olabilir.
- 2) İstenen sayısal süzgecin özellikleri ile belirlenmiş olan dönüşül sıklıklardan, örneksel süzgece ilişkin dönüşül sıklıklar (3.15) denklemi yardımıyla hesaplanır.
- 3) Örneksel süzgece çevrilmiş olan verilerden örneksel geçiş işlevi  $H(s)$  saptanır.
- 4)  $s = Z^2 - 2Z \cos \omega_c T + 1 / Z^2 - 1$  yazar, gerekli işlemleri yaptıktan sonra, payı ve paydası çokterim-

li şeklinde bir  $H'(Z)$  elde ederiz. Bu elde edilen denklemden aranan sayısal süzgeç gerçekleştirilir.

$\omega_{A1}$ 'in seçiminde tutulacak yol:

Bu seçim çeşitli biçimlerde yapılabileceği gibi, geçirilecek bandın iki uç sıklığı  $\omega_{D1}$  ve  $\omega_{D2}$  (3.15) denkleminde verecekleri  $\omega_{A1}$  ve  $\omega_{A2}$  sıklıkları birbirlerinin karşıt işaretlisine eşit olacak biçimde seçilebilir (yani  $\omega_{A1} = -\omega_{A2}$ ). Bu varsayımından sonra (3.15) denklemini  $\omega_{A1}$  ve  $\omega_{A2}$  için yazalım.

$$\omega_{A1} = \frac{\cos \omega_{D1} T - \cos \omega_{D2} T}{\sin \omega_{D1} T}$$

$$-\omega_{A1} = \omega_{A2} = \frac{\cos \omega_{D1} T - \cos \omega_{D2} T}{\sin \omega_{D2} T}$$

Bu iki denklemi toplarsak,

$$0 = \frac{\cos \omega_{D1} T - \cos \omega_{D2} T}{\sin \omega_{D1} T} + \frac{\cos \omega_{D1} T - \cos \omega_{D2} T}{\sin \omega_{D2} T}$$

elde ederiz, bu eşitlik düzenlenir ve trigonometrik özdeşlikler kullanılarak  $\cos \omega_{D1} T$  çözülürse,

$$\cos \omega_{D1} T = \frac{\cos \omega_{D2} T (\omega_{D1} + \omega_{D2})}{\cos \frac{T}{2} (\omega_{D1} - \omega_{D2})} \quad (3.16)$$

bulunur. Yukarıda söz edilen koşulu yerine getirecek olan  $\cos \omega_{D1} T$  (3.16) bağıntısından hesaplanır.

Şimdi bu yöntemi daha iyi açıklamak için örnekler vereceğiz.

Örnek 1.

Tasarımlanacak süzgeçten istenen özellikler ve diğer veriler:

$$\frac{1}{T} \cdot \text{Örnek alma sıklığı} = \frac{1}{T} = 10 \text{ kHz}$$

$\omega_{D1}$ 'den 1 kHz'e kadar düşme düzeyi olarak en çok 3 dB, 2000 Hz'den yukarı sıklıklar için 10 dB'den daha çok söndürülmüş olsun isteniyor.

Yukarıdaki koşulları örneksel olarak bir Butterworth süzgeci yerine getirir.

1)  $\omega_{A1}$  ve  $\omega_{A2}$ 'yi hesaplayalım:

Önce  $\omega_{D1} T/2$ 'yi ve  $\omega_{D2} T/2$  bulur, sonra bunları  $\omega_{A1} = \text{tg} \omega_{D1} T/2$  de yerine koyar,  $\omega_{A1} = \text{tg} \omega_{D1} T/2$  buluruz.

$$\frac{\omega_{D1} T}{2} = \frac{1 \text{ kHz} \cdot 360^\circ}{10 \text{ kHz} \cdot 2} = 18^\circ$$

$$\frac{\omega_{D2} T}{2} = \frac{2 \text{ kHz} \cdot 360^\circ}{10 \text{ kHz} \cdot 2} = 36^\circ$$

$$\omega_{A1} = \text{tg} 18^\circ = 0,325$$

$$\omega_{A2} = \text{tg} 36^\circ = 0,726$$

2)  $\omega_{A1} = 0,325$  sıklığında (yada düzgülenmiş 1 sıklığında) 3 dB düşme ve  $\omega_{A2} = 0,726/0,325 = 2,23$  düzgülenmiş sıklığında en az 10 dB düşme verecek örneksel Butterworth süzgecini oluşturmalıyız.

a)

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 (-1)^n V^n}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \omega^{2n}}$$

Geçirme bandı sonu için düşmeyi 3 dB aldığımızdan  $\epsilon = 1$  olur ( $\omega = 0$ : düzgülenmiş sıklık)

b)  $n$  yi bulmak için aşağıdaki işlem yapılır:

$$|H(j\omega)| \rightarrow 10 \text{ dB}$$

$$|H(j\omega)| \rightarrow 20 \text{ dB}$$

$$\frac{1}{|H(j\omega)|^2} = 10$$

$$1 + (2,23)^{2n} = 10$$

$$(2,23)^{2n} = 9$$

buradan  $n = 2$  elde ederiz.

c) Sıra kökleri bulmaya gelmiştir: ( $s_n$ : düzgülenmiş)

$s_n^{2n} = (-1)^n$   $n=2$  olduğuna göre

$$s_{in} = e^{j(180^\circ + k360^\circ)/4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

sol yarı düzlemdeki kökler:

$$s_{1,2} = (-0,707 \pm j0,707) \cdot 0,325$$

$$= -0,228 \pm j0,228$$

dür.  $s_1$  ve  $s_2$  yi  $H(s)$  de yerine koyarsak

$$H(s) = \frac{s_1 s_2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{s_1 s_2}{s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1 s_2}$$

$$H(s) = \frac{0,106}{s^2 + 0,46s + 0,106}$$

elde edilir.

3)  $s$  yerine  $\frac{Z-1}{Z+1}$  yazarsak

$$H'(Z) = \frac{0,106}{\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^2 + 0,46\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right) + 0,106}$$

$$= \frac{0,106(Z^2 + 2Z + 1)}{1,556Z^2 - 1,788Z + 0,646}$$

$$H'(Z) = 0,0677 \frac{Z^2 + 2Z + 1}{Z^2 - 1,142Z + 0,412}$$

elde edilen bu dizge işlevinden giderek, aranan süzgeç gerçekleştirilebilir.

Örnek 2.

Bu örnekte ise  $s = Z^{-1} - 2\cos\omega_0 T + 1 / (Z^2 - 1)$  dönüşümünü kullanacağız. İstenen süzgecin verileri aşağıda yazılmıştır.

$$f = \frac{1}{T} = 1000 \text{ Hz: Örnek alma sıklığı}$$

Geçireceği bant 100 Hz - 400 Hz (uç sıklıklarında güçsüzletme en çok 3 dB)

Söndürme: 45 Hz ve daha alçak, 450 Hz ve daha yüksek sıklıklarda en az 20 dB söndürülmüş olacak.

- 1)  $\cos\omega_0 T$ 'nin seçimi 100 Hz ve 400 Hz nin (3.15) dönüşümünden verecekleri  $u^+$ ,  $u^-$  sıklıklarının birbirlerinin karşıt işaretlisine eşit olmasını istersek  $\cos\omega_0 T$ 'yi daha önce bulmuş olduğumuz (3.16) dan hesaplayabiliriz.

$$\cos\omega_0 T = \frac{\cos \frac{T}{2} (\omega_{D1} + \omega_{D2})}{\cos \frac{T}{2} (\omega_{D1} - \omega_{D2})}$$

bu denklemin payı

$$\cos \left\{ \frac{1}{2 \cdot 1000 \text{ Hz}} 27r(100 \text{ Hz} + 400 \text{ Hz}) \right\} = \cos -\frac{\pi}{2} = 0$$

eder ve  $\cos\omega_0 T = 0$  olur, bunu (3.15) de yerine koyarsak,

$$\omega_{D1} = -\cot\omega_{D2} T$$

100 Hz ve 400 Hz için  $u_0 = \cot 36^\circ = \pm 1,38$

$$45 \text{ Hz için } u_0 = -\cot 16,2^\circ = -3,44$$

$$450 \text{ Hz için } u_0 = -\cot 16,2^\circ = \cot 18^\circ = 3,08$$

- 2) Şimdi sorumuz,  $0 < \omega_0 T < 1,38$  için güçsüzletmenin 3 dB yi geçmediği ve  $u_0 \geq 3,08$  den sonra güçsüzletmesi 20 dB veya daha çok olan bir örneksel süzgeç geçiş işlevi bulmaya dönmüştür.

Bunun için  $|H(j\omega)|^2 = 1 / (1 + (\omega / \omega_c)^{2n})$  biçiminde  $u_0 = 1,38$  için bir Butterworth süzgeci hesaplarız.

Not:  $\omega_0 T = 3,08$  için 20 dB güçsüzletme isteğimize göre bu  $u_0 = 3,44$  içinde kendiliğinden sağlanmış olur.

Düzgülenmiş sıklık  $0 / \omega_c = 3,08 / 1,38 = 2,23$  için 20 dB yada daha çok: güçsüzletme istendiğine göre:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}} \leq 10^{-2}$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n} > 100 - 1 = 99$$

$$2,23^{2n} > 99$$

$$n=2 \quad 25 < 99 \quad \text{eşitsizliği sağlamaz}$$

$$n=3 \quad 124 > 99 \quad \text{sağlar}$$

düzgülenmiş s için kökler:  $s_j = e^{j(1.360/6)}$

( $i=0,1,2,3,4,5$ ), sol yarıda kalan kökler ise

$$s_1 = -1 ; s_2 = -0,5 \pm j0,866 \text{ dir.}$$

Geçiş işlevi ise,

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)}$$

biçiminde olacaktır,  $s_1, s_2, s_3$  değerlerini yerine koyarsak:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

buluruz, s yerine  $s/1,38$  koyarsak:

$$H(s) = \frac{2,6}{s^3 + 2,76s^2 + 3,8s + 2,6}$$

elde ederiz.

- 3) Şimdi sıra gerekli dönüşümü yapmaya gelmiştir. Yalnız  $\cos\omega_0 T = 0$  olduğu için, bağıntı

$$s = \frac{Z^2 + 1}{Z^2 - 1}$$

biçimini alır, bunu H(s) de yerine koyar, gerekli cebirsel işlemleri yaparsak,

$$H'(Z) = 0,257 \frac{Z^6 - 3Z^4 + 3Z^2 + 1}{Z^6 - 0,58Z^4 + 0,42Z^2 - 0,056}$$

denklemlerle aranan sayısal süzgecin dizge işlevi  $H'(Z)$  yi buluruz.

## SONUÇ

Bu yazıda sayısal süzgeçlerin özellikleri, ne biçimde gerçekleştirildikleri, dizge işlevleri ve sayısal süzgeçlerin tasarımı incelenmiştir.

Varılan sonuca göre, bir sayısal süzgecin gerçekleştirilmesinde bütün zorluk işimizi görebilecek dizge işlevini oluşturmaktan çıkmaktadır. Gerçekleştirilmek istenen süzgecin özelliklerine bağlı olarak dizge işlevinin biçimi ve katsayıları değişmektedir. Dizge işlevi elde edildikten sonra buna karşılık gelen devre kolayca gerçekleştirilebilir.

Örneksel süzgeç bireşimi geniş biçimde incelenmiş ve yöntemler geliştirilmiştir. Bundan yararlanarak Bölüm 4'de görüldüğü gibi sayısal bir süzgecin dizge işlevini bulma sorunu örneksel bir süzgecin geçiş işlevinin bulunmasına indirgenebilir.

## KAYNAKLAR

1. Rabiner L.R., Charles M.Rader, Digital Signal Processing
2. Rader C.M., Alan V.Oppenheim, Digital Processing of Signals
3. Huelsman L.P., Active Filters: Lumped, Distributed, Integrated, Digital and Parametric