ZAMAN BAĞIMLILIĞI WALSH FONKSİYONLARI BİÇİMİNDEKİ KAYNAKLARIN OLUŞTURDUĞU ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN DİKDÖRTGEN DALGA KILAVLARI BOYUNCA YAYILIMININ ZAMAN DOMENİNDE İNCELENMESİ

Serkan Aksoy(1,2), Oleg A. Tretyakov(1)

e-mail: saksoy@gyte.edu.tr - tretyakov@gyte.edu.tr

(1)Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Bölümü
41400, Gebze, Kocaeli

(2)TUBITAK, MAM, MKTAE, Türk Ukrayna Ortak Araştırma Laboratuvarı, 41400, Gebze, Kocaeli

ABSTRACT

Electromagnetic wave propagation produced by time dependent sources like Walsh functions in rectangular, empty waveguides is investigated by a new time domain method called the Evolutionary Approach to Electromagnetics (EAE). The sources are located at z=0 and applied as an initial condition for transient wave propagation of waveguides in time domain. In that case, electromagnetic fied terms are found for TE and TM modes separetaly. The EAE solution of transients in rectangular waveguide is constructed as eigenvector series.

Anahtar Kelimeler: Walsh Fonsiyonu, Dalga Yayılımı

I.GİRİŞ

Dalga kılavuzlarında dalga yayılımı, zamana bağımlılığı monokromatik olan kaynakların oluşturduğu dalgalar için yoğun olarak araştırılmış olup, çözümler genelde frekans domeninde elde edilmiştir. Son yıllarda özellikle sayısal işaretlerin üretilmesi ve iletimi konularının önem kazanması sonucu zaman bağımlılığı sinüzoidal olmayan ve özellikle darbeler ve darbe katarları biçiminde olan işaretlerin dalga kılavuzu boyunca yayılımlarının incelenmesi önem kazanmıştır. Buradaki çalışmada darbe katarları biçimdeki işaretler matematiksel olarak Walsh fonksiyonları biçiminde modellenerek, dikdörtgen biçimli dalga kılavuzlarında yayılımları zaman domeninde analitik olarak incelenmiştir. Darbe katar modelinin Walsh fonsiyonları biçimde seçilmesinin önemli nedenlerinden birisi Walsh fonksiyonlarının periyodik olmayan darbe katarlarının modellenmesi için uygun olmasıdır. EZDY metodu aracılığı çözülen darbe katarı yayılımı problemi çözümü, nedensellik ve sonlu enerji koşullarını da sağlaması bakımından önemlidir [1].

II. WALSH FONKSİYONLARI

Walsh fonksiyonları ortogonal fonksiyonlar olup genlikleri +1 ile –1 değerleri arasında sıçramalar göstermektedir. Periyodik veya periyodik olmayan biçimlerinde olabilen Walsh fonksiyonlarının türevleri sinüzoidal fonksiyonlarda olduğu gibi birbirine benzer fonksiyonlar biçiminde elde edilemezler [2]. Walsh fonksiyonları Hadamard matrisleri yardımı ile matematiksel olarak ifade edilebilmekte olup 1900 yıllarda J.A.Barett tarafında tamamlanmış Walsh fonsiyonları seti bulunmuştur. Walsh fonksiyonlarının matematiksel ifadesi

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} h_n(i)\, p(t-(i-1)) \qquad (1)$$

biçimindedir. Burada $h_n(i)$, n'inci mertebedeki Hadamard matrisinin i'inci satırını ve $p(t)$ fonsiyonu ise birim darbe işaretini sembolize eder.

III. DALGA KILAVUZLARI İÇİN EZDY METODU

Kaviteler için daha önce geliştirilmiş olan EZDY metoduna benzer biçimde dalga kılavuzları için geliştirilen EZDY metodu da, Maxwell denklemlerinden kendi kendine özdeş iki operatörün dalga kılavuzu sınır kouşllarını da sağlayacak biçimde ayrıklaştırılmasına dayanır. Ayrıklaştırılan operatörler kendi domenlerinde tamamlanmış baz fonksiyonları seti oluşturmaktadırlar [1]. Böylece kılavuz içindeki elektromagnetik alanlar direkt zaman domeninde özvektör serileri biçimide ifade edilebilmektedirler. Elde edilen özvektör serilerindeki her bir özvektör fiziksel olarak bir dalga kılavuzu moduna karşılık gelmektedir. Buna göre dalga kılavuzu modlarının özvektör serileri biçimdeki açılımları TM modları için

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \sqrt[-2]{\varepsilon_o}\sum_{n=1}^{\infty} V_n^e(t,z)\nabla_\perp \phi_n \\ \vec{H}(\vec{r},t) &= \sqrt[-2]{\mu_o}\sum_{n=1}^{\infty} I_n^e(t,z)\left[\vec{e}_z \times \nabla_\perp \phi_n\right] \end{aligned} \qquad (2)$$

şeklinde elde edilir. (2) denkleminde görülen ϕ_n skaler potansiyeli TM modları için

$$(\Delta_\perp + \chi_n \sqrt{\varepsilon_o \mu_o})\phi_n = 0, \quad \phi_n\big|_S = 0 \qquad (3)$$

denkleminin çözümü ile bulunabilir. (3) denklemindeki χ_n, n'inci özdeğer olup $\Delta_\perp$ ifadesi yanlızca enlemsel koordinalar üzerinde Laplacian operatörünün uygulanacağını göstermektedir. (2) denklemindeki $V_n^e(t,z)$ ve $I_n^e(t,z)$ büyüklükleri elektromagnetik alan terimlerinin genliklerinini göstermekte olup

$$
\begin{aligned}
-\partial_{ct} I_n^e - \partial_z V_n^e + \chi_n^2 f_n = 0 \\
V_n^e = \partial_z f_n \\
I_n^e = -\partial_{ct} f_n
\end{aligned}
\tag{4}
$$

biçimindeki denklem takımının çözülmesi ile elde edilebilmektedir [1]. (4) denklem takımı yeniden düzenlenecek olursa matematiksel olarak iyi bilinen *Klein-Gordon* denklemi elde edilmektedir. Klein-Gordon denkleminin çözümü için değişkenlerin dönüşümü metodu yardımı ile çözüm aranacak olursa eksenel z konum ve t zaman parametrelerine bağlı olacak biçimde çözüm

$$
f(t,z) = \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^{m/2} J_m(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \tag{5}
$$

elde edilir. Burada c ışık hızını, J_m ise Bessel fonksiyonlarını göstermektedir. z=0 için (5) denklemi $\{J_m(\kappa ct)\}_{m=0}^{\infty}$ biçiminde m tamsayı seçilmek üzere tamamlanmış bir fonksiyon kümesi oluşturur. Bu durumda z=0'da başlangıç koşulları biçiminde uygulanan zaman bağımlılığı herhangi bir biçimde olan kaynak fonksiyonları Neumann serileri biçiminde

$$
\gamma(t) = f(t,0) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m(\kappa ct) \tag{6}
$$

ifade edilebilirler. Kaynakların zaman bağımlılıklarının Walsh fonksiyonları biçiminde olması durumunda birim basamak fonksiyonu için Neumann serisi açılımı

$$
\gamma(t) = J_o(\kappa ct) + 2\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m}(\kappa ct) \tag{7}
$$

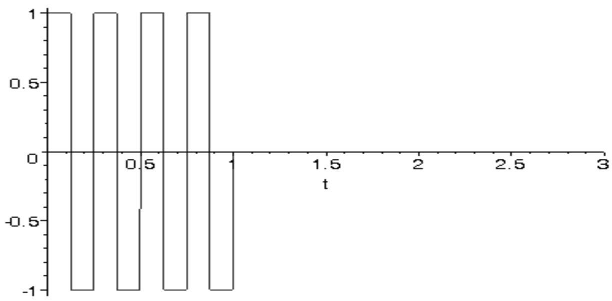
şeklinde elde edilir. Bu durumda farklı z'ler için çözüm (7) denkleminin yeniden düzenlenmesi ile

$$
\begin{aligned}
f(t,z) = J_o(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \\
+2\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^{m} J_{2m}(\kappa \sqrt{c^2 t^2 - z^2})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

biçiminde elde edilebilecektir. Birim basamak fonksiyonu için geçerli olan (8) denklemi yardımı ile birim darbe işareti elde edilerek (1) denklemi kullanılarak Walsh fonksiyonları için ifadeler elde edilebilecektir.

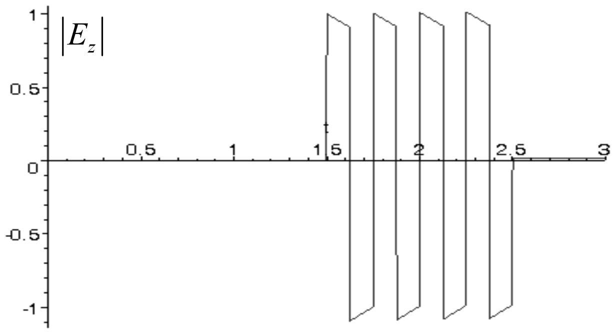
IV. SAYISAL ÖRNEK

Sayısal örnek için kolaylık olması açısından (8) denklemi biçimindeki çözümler boyutsuz olarak düzenlenmiştir. Örnek zaman bağımlılığı olarak, kare dalgaya karşılık gelen $W(7,t)$ fonksiyonu düşünülerek (6) denklemine benzer şekilde Neumann serilerine açılımı şekil 1'de gösterilmiştir.



Şekil 1. $W(7,t)$'nin Neumann serilerine açılımı

Şekil 2'de ise söz konusu kare dalga biçimli kaynağın oluşturacağı elektromagnetik alanın H_z bileşeninin yayılımı gösterilmiştir.



Şekil 2. E_z bileşenin yayılımı (z=1.5)

REFERANSLAR

[1] O.A. Tretyakov, "Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory", in Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, M.Hashimoto, M.Idemen, O.A.Tretyakov, Science House Company, Tokyo, Japan, 1993.

[2] K. G. Bequchamp, Walsh Function and Their Application, Academic Press, NewYork, USA, 1975