UDK: 621.392

Devre *Analizinde Başlangıç Şartlan ve Nihaî*

m^. **

Değerlerin Önemi

Mustafa N. PARLAR Ph. D.
Brooklyn Polytechnic

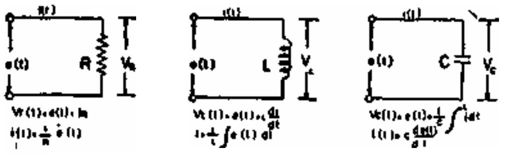
özet:

Devre analizinde esas problem, Ohm ve Kirchhoff kanunlarından faydalanarak, întegre - diferansiyel denklemler diye adlandırılan denge denklemlerini elde etmek ve bunları başlangıç şartlarını kullanarak çözmektir. Devrede enerji saklıyan (Endüktans ve kapasitans) elemanların adedi ne kada fazla olursa olsun, başlangıç ve nihaî değerlerin bulunduğu t = O+ ve t= co anlarında devre rezistiv bir karakteristik gösterir. Bu sebepten başlangıç ve nihaî değerlerin bulunması değişken katsayılı olmıyan ve dirençlerden meydana gelmiş devrelerin analiz metodlan kullanılarak yapılır.

Tarifler, ilk değerler ve Eşdeğer devre:

Elektrik devre analizleri başlıca Ohm ve Kirchhoff kanunlarına" dayanır. Genel olarak pasif, lineer ve yön hassasız (bilateral) elemanlardan bir i (t) aklini geçirilirse, bu akım devre elemanında akımın giriş yönünde (+), çıkış ucunda (—) işaret olan bir e (t) gerilimi meydana getirir. Şekil (1) de R.L. ve C elemanlarında akım ve gerilim bağıntıları gösterilmiştir.

Bu elemanlarda güç ve enerji bağlantıları ifade la, lb, ve Ic de gösterilmiştir.

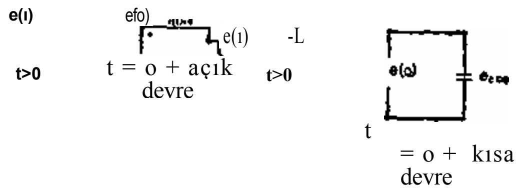


a) Resistans b) Endüktans c) Kapasitans

Şekil (1). Pasif devre elemanları ve akım-gerilim bağıntıları.

Bu elemanlarda ki güç ve enerji bağlatılan aşağıdaki tabloda (la, İb ve Ic) gösterilmiştir.

Enerji saklama hassası olan endüktans ve kapasitansda t = 6 anında devrede akım ve gerilim mevcut değilse saklanacak enerji t anındaki akım ve gerilime bağlı değerler alır. Empüls uyarımları hariç, devrede anî enerji meydana gelmiyeceğinden şekil (2) de t = o anında (b) elemanında akım ve (c) elemanında gerilim sıfır değerinde olması gerekir. Bu ise t = o anında endüktansın açık devre kapasitansın ise kısa devre ile gösterilmesine imkân verir. Şu halde t =o anında elemanlarda enerji yok ise Şekil (2) de bu tip elemanlar ve t = o + anı eş değerleri gösterilmiştir.



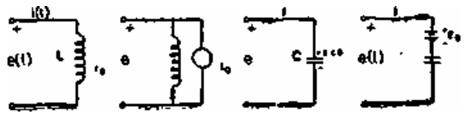
Şekil z

Şekil (2) Endüktans ve Kapasitansın t • -.o+ anındaki ej *değerleri.*

Eğer t = o anında her İM devrede de sıra ile

$$W_L = \text{ILI«}_O \text{ ve } W_C = |CE^2 0$$

enerjileri varsa bu takdirde eşdeğer devreler Şekil (3) de olduğu gibi gösterilir.



Sekil 3.

(Şekil (3) : a) Endüktansın t = o anında W i. enerjisi olduğuna göre t = o + eş değer devresi açık devre L ile paralel bağlı atam kaynağı ile gösterilir.

Eleman	R	L	C
Güç		P di / --- Jj .1	de / dt'
Enerji	t W = f pdt R J o (la)	W t= j,*, ,,, o 1 ~ |i (t) 2 1 |i (o) (lb)	® 1 öt o 1 -e W 2 -e (o) (Ic)

b) Kapasitansın t = o anında W_c enerjisi olduğuna göre t = o + eş değer devresi kısa devre *C* ile seri bağlı E_0 gerilim kaynağı ile gösterilir.

Esasen şekil (1) de verilen endüktans akımı ifadesi ile kapasitans gerilim ifadeleri ilk enerji şartlarını I_0 ve E_0 değerlerini denge denklemle-* rine ithal ederek nazarı itibare almış bulunuyoruz .Şöyleki,

u . ı (t) = l birim basamak f onksyonu

di
u.! (t) = L — + Ri (4) dt

i (t) = — (1 - e-$^{R\prime Lt}$ u.ı (t) (5)
R\

İL (t) = . ' r ' — e (t) dt = — eVt) dt -f — e (t) dt = I + — e (t) (2a)
dt
L -ico L J_^ L J_0 o L J_0

v(t) = - r i (t) dt = - i (t) dt + - i (t) dt = E + — i (t) (2b)
dt
J .. C J .. C -L o G J_n

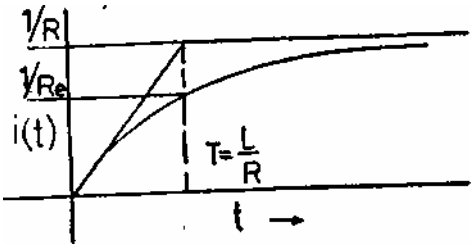
Bu ifadelerden görüldüğü gibi eğer e (t) ve i (t) empuls olarak verilmiş ise

e (t) dt = o ve i (t) d t = o böylece
o o

i (o+) = I (a) '
3

v (o+) = Ü (b)

olur. Bu bağlantılar sonucu olarak endüktansla rın akıma ve kapasitanslarm da gerilime hassas elemanlar olduğu ve endüktanslarda akımın, ka-pasitanslarda da gerilimin aniden değişemiyece-ği neticesine varılır. Bu elemanların bu mühim hassaları elektroteknikte sıra ile akım ve gerilim regülasyonu için kullanılmaktadır.



Şekil 4b). Akım fonksiyonu.

du.ı (t)
v(t) = L di/dt -=L-(1-c-$^{R\prime\wedge}$,, t \ du.ı —- dt
1-L R^V

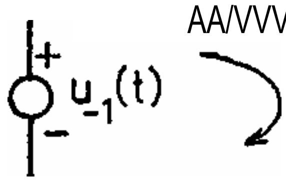
L R u.,. (t) =
R
Rf l-e-$^{R\prime Lt}$\u (t) + e-"'^{L} ' u., (t)

= e-$^{R}/^{Lt}$ u., (t) (6)

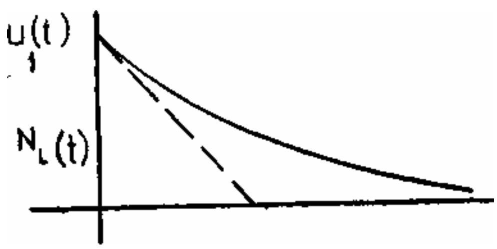
Nihaî Değerler ve Eşdeğer Devre :

Nihaî değerlerin bulunması için sıra ile RL ve RC devrelerinde birim - basamak (unit-step) geriliminin meydana getirdiği akım değerlerini hesap edelim. Şekil (4) te devreler uyarımı ve cevap (response) gösterilmiştir.

K
AA/VVVV---------------



Şekil (4a) Seri R-L devresi.



T=RC t -»

Şekil 4C). Endüktans gerilim fonksiyonu.

-R/L «-1 VL (t) = e

ifadesi bu geriliminin t = es anında sıfır olduğunu belirtir ve dolayısıyla endüktans t = eo anında kısa devre özelliği gösterir

R

----------- \MAMA/--------

u, (t)

Şekil (4d) Seri RC devresi

u-ı (t) = Ri + 1

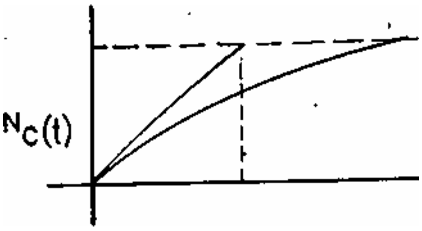
— idt

1 — t/R'C i (t) = — e
R (t)

(8)

(t) = 1 - c idt = 1 RC —t/RC e u.ı (t) dt = 1 — c •t/RC (t)

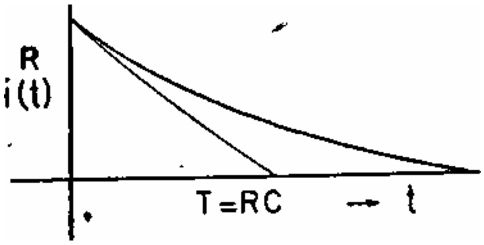
i(t) ,-»=, = O olduğundan kapasitans t =eo anında açık devre özelliği gösterir. Şekil 4a-f RL ve RC devrelerinde birim-basamak uyarımının meydana getirdiği cevaplardır.



Şekil (4}> Kzpasıtans genlım fonksiyonu

Şu halde devrelerde son değerleri hesap edebilmek için devrede bulunan endüktansları kısa devre ve kapasitansları da açık devre olarak göstermek gerekir. Şekil (4a-f) de gösterilen devre ve çözümlerinin sonuçlan şekil 5 de gösterilmiştir.

1



Şekil (4e) Akım fonksiyonu.

Şekil 2, 3, ve 5; L ve C elemanlarının t = o + ve t = co anlarındaki özelliklerim göstermektedir Bu şekillerde görüldüğü gibi endüktans ve kapasıtansta enerji olsun veya olmasın gösterilen özellikler ya kısa devre veya açık devre özellikleridir, ancak, devrede enerji mevcut ise bunlar t = o + anında açık devre özelliği gösteren endüktansta enerji açık devre elemanına paralel bağlı ve değen enerjiye tabı bir akım kaynağı ile ve kapalı veya kısa devre özelliği gösteren kapasitansta enerji kısa devre olarak gösterilen kapasitansa seri olarak bağlanmış ve değeri ilk enerji ile belirtilmiş bir gerilim kaynağı ile gösterilir

' Örnekler:

Verilen devrenin t <^ O anlarında enerji sahibi olmadığı ve t = o anında anahtarın kapatıldığını kabul edelim. Verilen devrede'ia, ib, iç ve id akımlarını ve V_L geriliminin ı) t = o + ve u) t = as anlarındaki değerlerini bulalım.

KISA DEVRE

KISA DEVRE

ACIK DEVRE

•*V AÇIK o DEVRE

Başlangıç enerjisi olmayan •• elemanlar

t = co için eşdeğeı devre

Başlangıç enerjisi ilan elemanlar

t = ee iÇ'" eşdeğeı devre

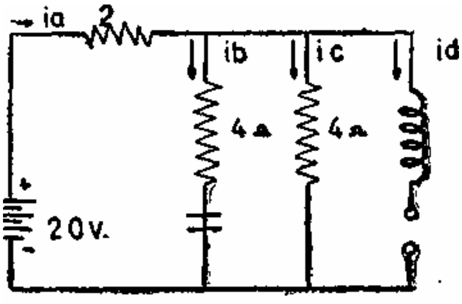
Şekil (5) L ve C elemanlarında enerji bulunması ve bulunmaması halinde t = cb iken devre durumu.

•VvVMv- [«b ıı * ih "T

>3h

Şekil (6a).

Çözüm : 1) t = o + için devrede hiç enerji olmadığından L açık devre ve C kısa devre olacaktır. Durum (6b) de gösterilmiştir.



(Şekıl (6b)

Şu halde

$i_d = O$

$i_a = \frac{20}{2+2} = 5$ amper

$i_b = i_c = \frac{}{2} = 2.5$ amper

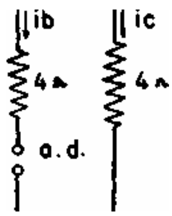
.'. $v_L = i_c 4 = 10$ volt

ü) t = os için devrede L kısa devre C ise açık devredir. Bu durum (6c) de gösterilmiştir.

2*

—WVvWV

id



-Ş- 20v

Şekil 6c).

t= os için (6a) devresinin aldığı şekil.

Su halde

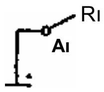
$\imath_a = \frac{20}{2} - = 10$ amper

$i_b = O$ açık devre

$i = O$

$i_d = 10$ amper

2) Şekil (7a) da verilen devrede A! anahtarı t = o anında kapatılıyor. Bu devrede her iki endüktansın uçlarındaki gerilimleri t = o -f- anında ve her iki kapasitansın gerilimlerini t= co anı için bulalım.



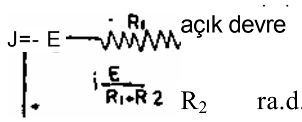
p-W$fo—l

— E

I

Şekil (7a).

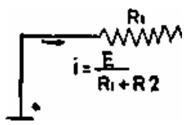
Verilen devrede t <^ O anında hiç bir enerji bulunmadığında A, anahtarı t = o anında kapa-



R_2 ra.d. kısa devre

Şekil (7b). Şekil (7a) devresi t = o + için

türsa Şekil (7a) devresi t = o + için Şekil (7b) ve t = os için de Şekil (7c) de olduğu gibi gösterilir.



kısa d. acık devre.

a c vW R_2
kısa devre

Şekil (7c). Şekil (7a) devresi t = co için

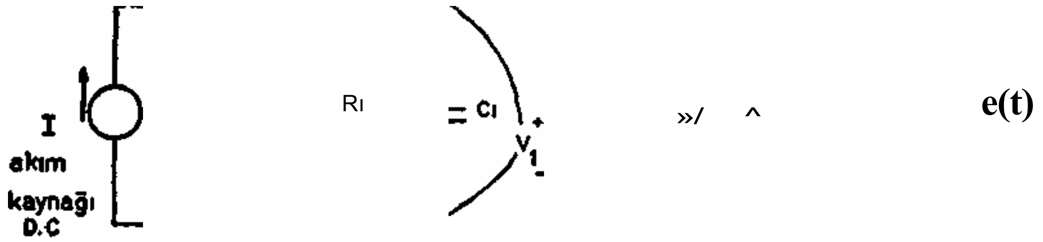
Şekil (7b) ve (7c) devrelerinden E kaynağından çekilen akımın değeri:

$\imath = \frac{E}{R_1+R_a}$ olduğu ve (7b) devresinde endüktansların gerilimlerinin

$İR_2 =$ E ve (7c) devresinden de gene aynı akım geçtiği için kapasitansların gerilimlerinin :

olacağı kolaylıkla görülür.

3) Bazen verilen devrede bir kaç göz endük-tans ve kapasitanslar bulunabilir. Bu takdirde devre belirli bir enerji konumunda iken uyarılıyorsa, devrenin her zamanki denge durumunu temsil eden denge denklemlerini çözmek için yalnız bilinmi-yen akün veya gerilimlerin ilk ve son değerlerini * bilmek veya hesap etmek integra-diferensiyel denge denklemlerini çözmeye kâfi gelmez. Bunun için istenen akım veya gerilimin birinci ve daha yukarı derecelerdeki türevlerinin t = o + anındaki de- O terlerinin hesap edilmeleri gerekir. Bu gibi hallerde devre denge denklemleri yazılır ve Şekil 2 ve 3 deki esaslar kullanılarak önce t = o -f değerleri sonra sıra ile ilk ve daha yukarı derecedeki türev değerleri denge denklemlerinden hesap edilir. Bu izahı Şekil (8a) da gösterilen devrede çıkış e (t) geriliminin t = o + anındaki değeri ve ilk üç türevinin değerini hesap etmemizde uygulıyalım.



ŞeMl (8a).

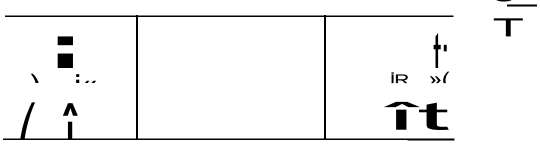
\./ anahtarı t = o anında açıldığına göre : , .

de $\quad d^2e \quad$ ve

$dt^a \quad dt^s$

değerini t = o + anında bulalım.

t = o + anında C^ ve C_2 elemanları kısa devre ve L elemanı açık devre olacağından t = o + için (8a) devresi Şekil (8b) seklini alır.



Şekil (8b). Şekil (8a) devresinin t = o + anında eşdeğer devresi

Bu tip meseleleri çözmek için t >O anlarını kapsıyan ve Şekil (8a) yi temsil eden devre integ-ral-diferensiyel denge denklemlerini yazmak lâzım-dır. Şekil (8a) devresinde iki bağımsız düğüm nok-tası (node point) (l ve 2) olduğundan denge denklemlerini bu düğüm gerilimleri (v, ve v_2) cin-sinden yazabiliriz. Bu ifadeler 10a ve b de gösteril-miştir.

-r+ °1-s +T] (",-'.)*

—L f (v — v \dt +C
L J \ª !/ , ,

dv

'(10a)

" + TT ^lob)

dv

2

(10a) ve (lOb) ifadelerinde tarif edilen v_2 (t) ge-rilimi incelenmesi istenen e (t) çıkış gerilimine eşittir. Şekil (8b) t = o + da :

v (t) = O ve v (t) = 0

1 t=ö+ 2 ,t = o+ (}

olduğu görülür. Bu değerler (10a) ve (lOb) de yerine konursa:

dv ı

"dT dv (12a)

= O ^{2} "dT (12b)

olduğu gösterilir. Şimdi (lOb) nin türevi alınırsa :

J
T

dt

dt

elde edilir. Bu son ifadeye 11 ve 12 değerleri uy-gulanınca :

=0 $\underline{dV_a}$ "di^5" (14)

elde edilir. Son olarak (13) ifadesinin tekrar türevi alınır ve bu türev ifadesine 11, 12, 14 değerleri uygulanırsa :

$d^sv.$

dt^3 değeri hesap edilmiş olur.

dv 1 d'v, _ (15)

dt ^{R}» dt^1 ~

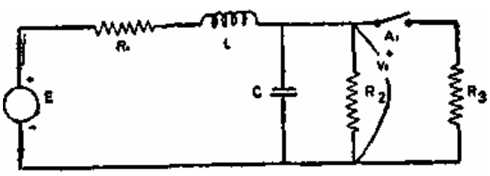
d^{a}v$_a$dt^a

LG$_2$ dt LG, C, (16)

değerleri hesap edilir.

Bu tip meselelerin çözümlerinde hatırlanacak en mühim husus 10a, lOb, 13 ve 15 denklemlerinin t ^> O anlarının bütününü kesiksiz bir şekilde kapsadığı ve bu sebepten t = o + değeri için gerekli hesapların yapılabilmesini sağlamış olmasıdır. Bir diğer husus da (ki örnek problem ile ilgisi yoktur), ilk değerleri kolaylıkla kullanmamıza imkân vermektedir. Şöyle ki, her hangi bir devrede nazarı itibare alınan ilk değerler, o devrenin ilk değerlerin düşünüldüğü andan evvel her ne şekilde uyarılmış olurlarsa olsun bu uyarım tesirleri ilk değer anında endüktansta bir akım ve kapasitansta bir gerilim ile temsil edilirler (bak şekil 3). Bununla beraber yukarda ifade edilen akım veya gerilimin ne şekilde elemanlara tatbik edildiği ve son değeri aldığı ilk değerlerin hesapları için önemli değildir.

4) Son örnek olarak (9a) devresini ele alalım. Bu devrede t = o anında devrede enerji depolandığını ve bunların L deki I_0 akımı ve C deki E_0 gerilimi ile değerlendirilebildiğini kabul edelim.



ŞeşMl (9a).

Şekil (9a) da A! anahtarı t = o anında kapatılıyor, t <^ O için devre duruş haline varmıştır. Aj den geçen akımın ve bu akımın türevinin t = o + ve aynı akımın t = oo değerini hesap edelim. O için devre Şekil (9b) de gösterilmiştir.

—•! RI

£e i» 1

f *' \

Şekil (9t>).

Gerilim kaynağının vardığı akım

E

x f R,

ve R? direncinin gerilimi :

E = IR$_2$ = E dir.

Şu halde t = o + için endüktansın taşıdığı akına :

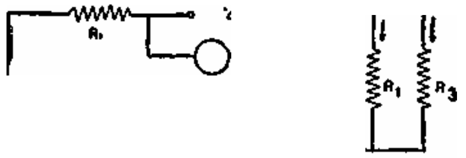
amper ve kapasitans gerilimi

RI -J-Rg

E = E = o E volttur.

R»

Bu duruma göre t = o -f anı için Şekil (9a) devresi eş değer durumu, Şekil (3) deki esaslar uygulanınca Şekil (9c) halini alır.



(9c) t = o + içm jefctî (9a; devresi.

Şu halde A! anahtarından geçen akım : ^9- amperdir. A_l anahtarından geçen akımın türevinin t = o + anındaki değerini bulmak için örnek (3) de yaptığımız gibi Şekil (9a) devresinin *t^> O* için denge denklemini yazalım. Devre bağıntıları nı yazmak için E gerilim kaynağı ve R! direncini Thevenins-Nortons transformasyonuna göre değiştirelim, ve Şekil (9d) devresinde V! ve v_2 bilinmiyen gerilimlere göre akım denge bağıntılarını yazalım:

1 __ /-KTOOTv 2 -

onnnr^-

L

V-"-C

E/R,

Şekil (90.). t

- = — +

f (

ı RI I J V (17)

—oo

dt R (18)

«o

Son iki bağıntıda integral ifadelerini (— eo ,0) ve (O — t) aralıklarına ayırır ve (— co ,0) değerleri I_0 akımını vereceğinden, yerine koyarsak:

— v \ dt (19)

0= -I +T L I fv — v dt
— v
0 L (2 l
dt

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılarda bilinmiyen :

v_1 ve v_2

gerilimlerini t = o + için hesap edebiliriz:

$I_{12} = I_o = \frac{E}{R_1 + R_2}$ bulunmuştu.

Şu halde R_x den geçen akün :

$I_{10} = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{E \cdot R_2}{R_1 (R_1 + R_2)}$ (21)

böylece $v_1(o+) = I_{10} R_1 = \frac{E \cdot R_1 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)}$ (22)

ve $\frac{R_1 + R_2}{E} = E_0$ (23)

Şu halde A! anahtarından t = o + anında geçen akün:

$v(o+)R_2 - E \frac{R_a}{R_3 (R_1 + R_2)}$ amper bulunur.

(18) Bağlantısında t-»o + alınırsa, integral teriminin hiç bir tesiri olmıyacağı görülür ve bu bağlantıdan dv_2/dt çözülürse:

$$C \frac{dv_2}{dt} = I_0 - \left(\frac{v_2(o+)}{R_3} + \frac{v_2(o+)}{R_3}\right) \quad (24)$$

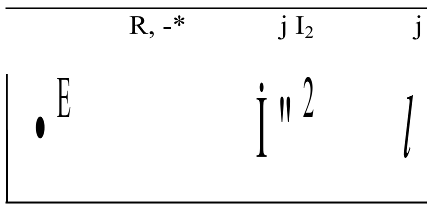
R. g bulunur.

- • + - • (*»>
2 3

Şu halde Aj anahtarından t = o + anında geçen akımın türevi, (R_3) direnci geriliminin türevinin t = o + anı değerinin R_3 oranı olarak bulunması mümkün olduğunda :

$\frac{dt}{t=o+} \quad {}^{K}a(R$ ç- olur. **(25)**

Son olarak (9a) devresi t = co için Şekil (9e) de görülen şekli alır.



. t = co anında L kısa devre ve C açık devre olacağından, Şekil (9a) devresini gösterir. Bu devreden :

r,

R_1

R_2

$I_a = \frac{R_2}{R_a + R_3} \quad \frac{R_2 + R_3}{R_1 + 1/R_a + 1/R_3}$

değerleri bulunur. I_3 t = co anında Aj anahtarından geçen akım değerini gösterir.

Netice :

Lineer devre analizlerinde denge denklemlerini çözmek için lüzumlu ilk değerler bu yazımızda gösterilen metodlar yardımı ile bulunabilir. Bu sebepten devre analizlerini yapabilmek için lüzu-