



ROBOT KOLLARIN DÜZ VE TERS KİNEMATİĞİ

ÖZET

Bu makalede önce, robot kol kinematiğine hazırlık olmak üzere, üç boyutlu uzayda yer alan eksen takımları arasındaki konum ve yönelim ilişkileri ve bu ilişkileri birarada gösteren "homojen dönüşüm matrisleri" üzerinde durulmuştur. Bunu izleyerek uzaysal mekanizmaların matematiksel gösterimi için geliştirilmiş olan HD (Hartenberg-Denavit) yöntemi tanıtılmış ve robot kollara uygulanışı anlatılmıştır. Daha sonra, verilen eklem değişkenleri cinsinden robot kolun el'inin konum ve yöneliminin ifade edilmesi olarak tanımlanan "düz kinematik" ve ardından el'in verilen konum ve yönelimini sağlayacak olan eklem değişkenlerinin belirlenmesi olarak tanımlanan "ters kinematik" konuları işlenmiş ve Stanford tipi bir robot kol üzerinde örneklenmiştir.

ABSTRACT

in this article, first, as a preparation for manipulator kinematics, location and orientation relationships are briefly reviewed among reference frames in three dimensional space and the use of "homogeneous transformation matrices" is mentioned for a compact way of expressing these relationships. Following this, the application of the HD (Hartenberg-Denavit) convention to the manipulators is explained which has originally been developed for mathematical modelling of spatial mechanism. Later, the subject of "direct kinematics", i.e. expressing the location and orientation of the manipulator's hand in terms of the joint variables; and the subject of "inverse kinematics", i.e. determining the joint variables corresponding to specified location and orientation of the hand are investigated and exemplified on a Stanford manipulator.

Prof. Dr. M. Kemal ÖZGÖREN (*)

(*) ODTÜ Makina Mühendisliği Bölümü

1. Giriş

Bir robot kola ilişkin iş planlaması, yörünge planlaması, dinamik, ve kontrol problemleri ele alındığı zaman ilk gereksinme duyulan hususlardan biri, bu robot kolun kinematik modelinin oluşturulması ve buna dayanarak gerekli kinematik ilişkilerin elde edilmesidir.

Kinematik modelleme için genellikle HD (Hartenberg-Denavit) yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntem Bölüm 4 ve Bölüm 5'te açıklanmıştır.

Robot kollar için kinematik ilişkiler, iki farklı yönde elde edilirler:

(i) El'in zemine göre konum ve yönelimini eklem değişkenleri cinsinden belirleyen "düz kinematik" ilişkileri. Bu ilişkiler, Bölüm 6'da açıklanmıştır.

(ii) El'in zemine göre verilen konum ve yönelimini sağlayacak olan eklem değişkenlerini belirleyen "ters kinematik" ilişkileri. Robot kolun serbestlik derecesine ve topolojik yapısına (döner ve kayar eklemlerinin sayısına ve sıralanışına) bağlı olan ve genelde lineer olmayan bağımlı denklemlerin çözümünü gerektiren ters kinematik ilişkilerin elde edilmesi, Bölüm 7'de açıklanmıştır.

2. Üç Boyutlu Kinematiğin Ana Hatları

Üç boyutlu uzaydaki bir \vec{r} vektörü, ortogonal sağ el düzenli, eksenleri eş ölçekli, ve temel birim vektörleri

$$\{\vec{u}_i^{(a)}\}: i=1,2,3 \text{ ile } \{\vec{u}_j^{(b)}\}: j=1,2,3$$

olan F_a ve F_b eksen takımlarında, şu şekilde ifade edilebilir:

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{u}_i^{(a)}, \quad \vec{u}_i^{(a)} = \sum_{j=1}^3 y_{ij} \vec{u}_j^{(b)} \quad (1)$$

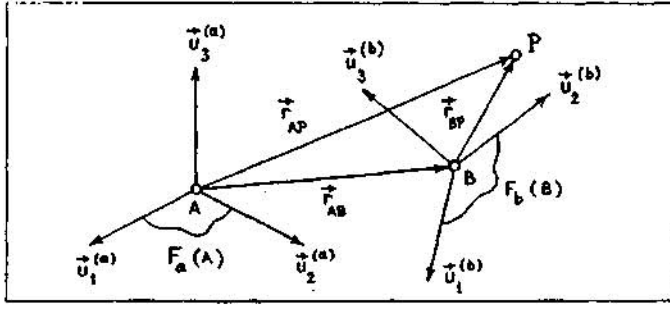
Bu ifadedeki \vec{r} bileşenlerinden oluşan $\vec{r}^{(a)}$ kolunu ile $\vec{r}^{(b)}$ bileşenlerinden oluşan $\vec{r}^{(b)}$ kolunu arasındaki ilişki ise, F_b 'den F_a 'ya dönüşüm matrisi olan $A^{(a,b)}$ kullanılarak

$$\vec{r}^{(a)} = A^{(a,b)} \vec{r}^{(b)} \quad (2)$$

biçiminde yazılabilir.

Görüldüğü gibi bu ilişki, 3'lü kolonlar arasında 3×3 'lük bir matris kullanılarak yazılmış homojen bir denklemdir.

Öte yandan, bir vektörün iki eksen takımındaki bileşenleri arasında değil de, bir P noktasının iki eksen takımındaki koordinatları arasında ilişki



Şekil 1.
Bir P noktasının iki eksen takımına göre konumu

kurmak istenirse, bu noktanın orijinleri A ve B noktalarında olan F_a (A) ve F_b (B) gibi iki eksen takımına göre tanımlanan konum vektörleri arasında, Şekil 1'de görüldüğü gibi, şu ilişki yazılabilir

$$\vec{r}_{AP} = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_{BP} \quad (3)$$

Denklem (3), \vec{r}_{AP} ile \vec{r}_{AB} vektörleri F_a (A)'da \vec{r}_{BP} vektörü ise F_b (B)'de ifade edilerek, aşağıdaki matris denklemi biçiminde de yazılabilir

$$\begin{bmatrix} \cdot(a) \\ \cdot(a) \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \cdot(b) \\ \cdot(b) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \cdot(a) \\ \cdot(a) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Görüldüğü gibi, P noktasının F_a (A) ve F_b (B)'deki koordinatlarından oluşan $\vec{r}_{AP}^{(a)}$ ve $\vec{r}_{BP}^{(b)}$ vektörleri arasındaki bu ilişki, \vec{r} teriminin varlığı nedeniyle, homojen olmayan bir denklemdir. Bu denklemi homojen biçime sokmak istenirse, aşağıda tanımlanan büyütülmüş 4'lü vektörler ve 4 x 4'lük homojen dönüşüm matrisi kullanılabilir

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \begin{bmatrix} \cdot(a) \\ \vec{r}_{AP} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{BP}^{(b)} = \begin{bmatrix} \cdot(b) \\ \vec{r}_{BP} \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\hat{H}_{AB} = \begin{bmatrix} \hat{C} & \vec{r}_{AB} \\ \vec{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Burada $\vec{0}$, sıfırlardan oluşan 3'lü $\vec{0}$ kolonunun transpozunu göstermektedir. Yukarıdaki tanımlar sayesinde denklem (4), homojen olarak aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\vec{r}_{AP}^{(a)} = \hat{H}_{AB} \vec{r}_{BP}^{(b)} \quad (6)$$

Dikkat edilirse, $\vec{r}_{AB}^{(a-b)}$ matrisi, $\hat{C}^{(a-b)}$ bölümü ile dönme ($a \rightarrow b$), $\vec{r}_{AB}^{(a)}$ bölümü «e de ötelenme (A \rightarrow B) bilgilerini taşımaktadır.

Denklem (6)'nın tersi göz önüne alınırsa,

$$\begin{bmatrix} \cdot(b) \\ \cdot(b) \end{bmatrix} \mathbf{x} = \hat{H}_{BA} \begin{bmatrix} \cdot(a) \\ \cdot(a) \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad (7)$$

olduğu görülür. Öte yandan, ters dönme matrisi

$\hat{C}^{(b-a)}$ ve ters ötelenme kolonu $\vec{r}_{BA}^{(b)}$, şu şekillerde ifade edilebilirler.

$$\hat{C}^{(b,a)} = \left[\hat{C}^{(a,b)} \right]^{-1} = \hat{C}^{(a,b)T}; \quad (8)$$

$$\vec{r}_{BA}^{(b)} = \vec{r}_{AB}^{(a)} = -\hat{C}^{(b,a)} \vec{r}_{AB}^{(a)} \quad (9)$$

Dolayısıyla, homojen dönüşüm matrisinin tersi, aşağıdaki biçimde tanımlanmış olur:

$$\hat{H}_{BA}^{(b,a)} = \begin{bmatrix} \hat{C}^{(a,b)T} & \vec{r}_{BA}^{(b)} \\ \vec{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Eğer ikiden fazla, örneğin 3, eksen takımı söz konusu olursa, P noktasının koordinatlarını ifade etmek üzere eksen takımları ikiye ikiye ele alınarak birleşik dönüşüm matrisi için şu denklem yazılabilir.

$$\hat{H}_{AC}^{(a,c)} = \hat{H}_{AB}^{(a,b)} \hat{H}_{BC}^{(b,c)} \quad (11)$$

Bu denklem, daha fazla eksen takımı söz konusu olursa,

$$\hat{H}_{AZ} = \hat{H}_{AB} \hat{H}_B \hat{H}_C - \hat{H}_X \hat{H}_Y \hat{H}_Z \quad (12)$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Eğer dörtlü matrisler yerine üçlü matrisler kullanılacak olursa, denklem (12)'nin derleşik olarak ifade ettiği bilgi, aşağıda olduğu gibi daha ayrıntılı bir biçimde de ifade edilebilir.

$$\hat{C}^{(a,z)} = \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \dots \hat{C}^{(x,v)} \hat{C}^{(y,z)} \quad (13)$$

$$\vec{r}_{AZ}^{(a)} = \vec{r}_{AC}^{(a,c)} + \hat{C}^{(a,b)} \vec{r}_{BC}^{(b,c)} + \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \vec{r}_{CD}^{(c,d)} + \dots + \hat{C}^{(a,b)} \hat{C}^{(b,c)} \dots \hat{C}^{(x,v)} \vec{r}_{vz}^{(x,v)} \quad (14)$$

Yukarıda görüldüğü gibi, dörtlü homojen dönüşüm ifadeleri, gösterim kolaylığı ile denklemlerin derleşik olarak yazılabilmesi açısından üçlü homojen olmayan dönüşüm ifadelerine göre daha avantajlıdır ve bu nedenle özellikle robotik alanında sıklıkla kullanılmaktadırlar. Buna karşılık, üçlü ifadeler, hesaplamalardaki işlem sayısı ve gerekli bellek gereksinimi açısından dörtlü ifadelerle göre daha avantajlıdır. Örneğin, n eksen takımı için; denklem (12)' 64(n - 1) çarpma ve 48 (n - 1) toplama gerektirirken denklem (13) ve (14), birlikte, 36 (n - 1) çarpma ve 27 (n - 1) toplama gerektirmektedir.

3. Dönme Matrisi İfadeleri

F_b eksen takımının F_a eksen takımına göre dön-

mesini belirleyen \vec{n} birim vektörlü eksen ve 6 açısı biliniyorsa, aradaki dönme matrisi şöyle ifade edilebilir [5], [6],

$$\hat{C}^{(a,b)} = I \cos \theta + \vec{n} \sin \theta + \vec{n} \vec{n}^T (1 - \cos \theta) \quad (15)$$

Bu ifadede şu tanımlar kullanılmıştır:

I = Birim matris.

$\vec{n} = n^{(a)} = n^{(b)}$

$\vec{n} \vec{n}^T$ = Vektörel çarpım matrisi

Bu matrisin n kolonundan türetilişi şöyledir

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{n} \vec{n}^T = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

n matrisinin özelliklerinden bazıları şunlardır:

- (i) $\vec{n} \vec{v} = \vec{n} \times \vec{v}$
- (ii) $\vec{n}^T = -\vec{n}$
- (iii) $\vec{n} \vec{n}^T = \vec{n} \vec{n}^T - I$
- (iv) $\vec{n} = -\vec{n}$

\hat{C} matrisinin yukarıdaki özellikleri ve $\sin \theta$ ile $\cos \theta$ 'nin Taylor Serisi açılımları kullanılarak denklemler (15),

$$\hat{C}^{(a,b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\vec{n} \vec{n}^T)^k$$

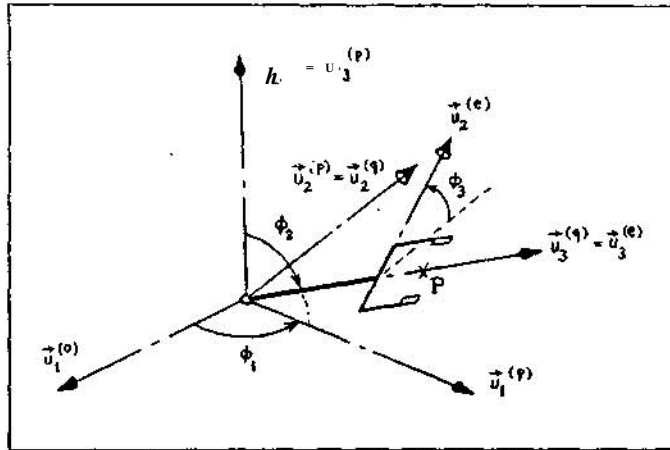
şeklinde de yazılabilir. Bu denklem ise, dönme matrisi için aşağıdaki "üstel" ifadenin Taylor Serisi açılımıdır [5], [6]:

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\vec{n} \theta} \quad (16)$$

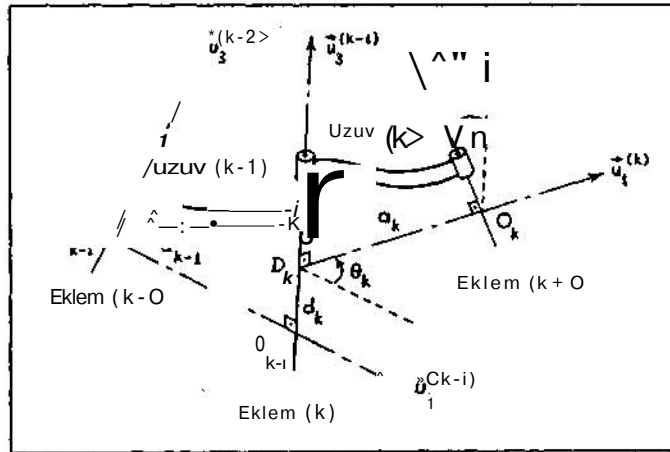
Bir çok durumda, F_b 'nin F_a 'ya göre dönmesi, (\vec{n}, θ) parametreleri yerine Euler Açılımları olarak adlandırılan üç açısız parametre $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ile ifade edilir. Böyle bir durumda, dönme matrisinin

$$\hat{C}^{(a,b)} = \hat{C}^{(a,p)} \hat{C}^{(p,q)} \hat{C}^{(q,b)}$$

şeklinde ayrıştırdığı ve $F_a \rightarrow F_p \rightarrow F_q \rightarrow F_b$ dönüşlerinin önceden belirlenmiş n_1, n_2, n_3 birim vektörlü eksenler etrafında $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ açı-



Şekil 2. El'in 323 Euler açı düzenine göre yönelimi



Şekil 8. Uzun parametreleri ve eksen takımları

larıyla yapıldığı varsayılır. Buradaki birim vektörler; F_a, F_p, F_q eksen takımlarının temel vektörlerinden biri olarak seçilir. Yapılan seçime göre, değişik Euler açısı düzenleri ortaya çıkar. Örneğin, oldukça sık kullanılan 123 ve 323 düzenlerindeki seçimler ve oluşan dönme matrisleri aşağıda gösterilmiştir.

(i) 123 Euler Açılı Düzeni:

$$\vec{n}_1 = \vec{u}_1, \vec{n}_2 = \vec{u}_2, \vec{n}_3 = \vec{u}_3;$$

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\vec{u}_1 \theta_1} e^{\vec{u}_2 \theta_2} e^{\vec{u}_3 \theta_3} \quad (17)$$

(ii) 323 Euler Açılı Düzeni:

$$\vec{n}_1 = \vec{u}_3, \vec{n}_2 = \vec{u}_2, \vec{n}_3 = \vec{u}_3;$$

$$\hat{C}^{(a,b)} = e^{\vec{u}_3 \theta_1} e^{\vec{u}_2 \theta_2} e^{\vec{u}_3 \theta_3} \quad (18)$$

Yukarıdaki a_1, σ_2, σ_3 matrisleri,

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

temel kolonlarından türetilmişlerdir.

Bir robot kolda, el'in (son uzvun) zemine göre yöneliminin belirtilmesinde, genellikle, 323 Euler açığı düzeni daha uygun olmaktadır. Bu düzene göre yöneltilmiş bir el, Şekil 2'de gösterilmiştir.

4. Robot Kolların Eklemleri ve Uzuvarları

Serbestlik derecesi n olan bir robot kol, son uzva (el'e) bağlı işlem elemanı (örneğin kısıkaç) hariç tutulursa, n hareketli uzuvdan ve n eklemden oluşur. Kinematik incelemelerde zemin, sıfırına uzuv olarak ele alınır. Eklem (k), uzuv ($k-1$) ile uzuv (k) arasında yer alır. Endüstriyel robotlarda, uzuvların rijit oldukları, eklemlerin ise bağladıkları iki uzuv arasında yalnızca bir tek bağıl hareket sağladıkları varsayılır. Bu hareketin türüne göre, eklemler, döner (revolute) ve kayar (prismatic) olarak ikiye ayrılırlar.

Uzuvlar rijit varsayıldıktan için her bir uzvun hareketi, kendisine bağlanan bir eksen takımının hareketi ile belirlenir. Ortogonal, sağ el düzenli, ve eş ölçekli olarak alınan eksen takımlarının uzuvlara bağlantısı, Hartenberg - Denavit (HD) yöntemiyle yapılır. HD yönteminin bir kaç değişik biçimi vardır. Farklı bazı indis kaymaları olan bu biçimler şunlardır:

HD (0) : Hartenberg ve Denavit tarafından önerilen orijinal biçim [4].

HD (1) : R.P. Paul, H. Asada, M. Shahinpoor, R.C. Gonzales, gibi bir çok yazar tarafından kullanılan biçim [1], [3], [7], [9].

HD (2) : J.J. Craig tarafından önerilen biçim [2].

HD (3) : W.A. Wolovich tarafından önerilen biçim [10].

Bunlardan en yaygın olan HD (1) biçiminin Şekil 3'ten yararlanılarak yapılan açıklaması aşağıdadır:

a) Uzuv (k)'ye bağlı F_k eksen takımının temel birim vektörleri:

i^{k+1} , j^{k+1} : Eklem ($k+1$)'in dönme ya da kayma eksenini boyunca alınan birim vektör. Eksen üzerindeki yönü keyfidir. İstenirse, şekildekinin tersi yönde de seçilebilir.

\hat{u}_1^{k+1} : Eklem (k)'nin ve eklem ($k+1$)'in eksenleri arasındaki ortak normal boyunca (k)'den ($k+1$)'e doğru alınan birim vektör.

$$\begin{matrix} \rightarrow^{(k)} & \rightarrow^{(k)} & \rightarrow^{(k)} \\ U_2 & = & U_3 \times U_1 \end{matrix}$$

Not: Eksenler için burada kullanılan 1,2,3 indisleri yerine x, y, z indisleri de kullanılabilir.

b) F_k 'nin orijini, Q_k :

$$O_k \text{ } u_1 \text{ ile } u_3$$

boyunca uzanan doğruların kesim noktasıdır,

c) Uzuv (k)'nin uzuv parametreleri:

(i) Etkin uzuv boyu, a_k :

$$a_k = D_k O_k, D_k, u_1 \text{ ile } u_3$$

boyunca uzanan doğruların kesim noktasıdır,

(ii) Büküm (twist) açısı, α_k :

$$\langle X_k, u_1 \text{ etrafında } U_3 \text{ 'den } U_3 \text{ 'ye} \rangle$$

doğru sağ el kuralına göre ölçülen açıdır,

(iii) Kayma uzunluğu (offset), d_k :

$$d_k = \text{°}K-1 \text{ °}''$$

(iv) Dönme açısı, θ_k :

$$8_k, u_3 \text{ etrafında } U_1 \text{ 'den } u_1 \text{ 'ye}$$

doğru sağ el kuralına göre ölçülen açıdır,

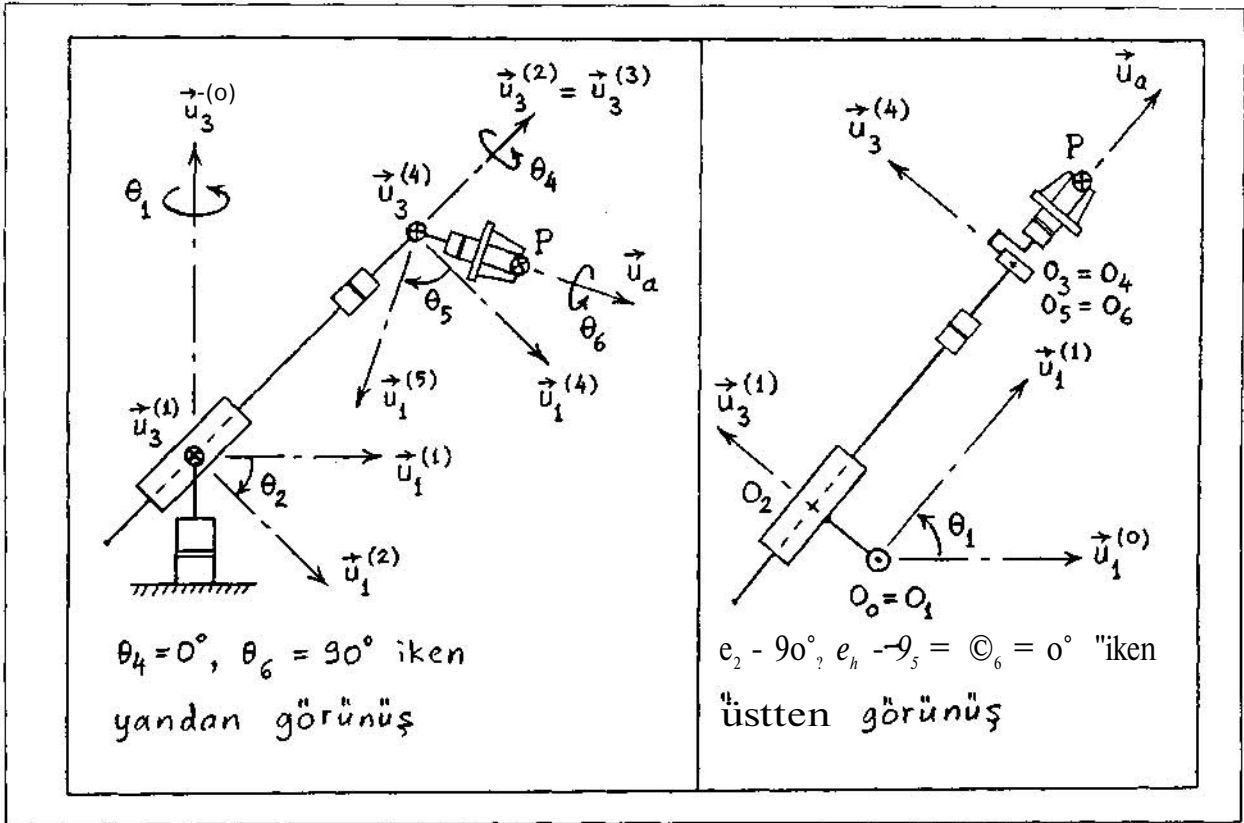
d) Eklem değişkeni:

(i) Eklem (k), döner eklem ise; uzuv parametresi O_k , eklem değişkeni olur. Uzuv (k)'nin uzuv ($k-1$)'e göre bağlı dönmesini gösterir.

(ii) Eklem (k), kayar eklem ise; uzuv parametresi d_k , eklem değişkeni olur. Uzuv (k)'nin uzuv ($k-1$)'e göre bağlı ötelenmesini gösterir.

Yukarıda genel olarak açıklanan HD (1) yönteminin uygulananışında aşağıda belirtilen özel durumlar ortaya çıkmaktadır:

(i) Robot kollarında, K_k açısı yalnızca $-90, 0, +90$ değerlerinden birini almaktadır.



Şekil 4. Stanford tipi robot kol.

(ii) Genellikle, $O_1 = O_0$ olarak alınır, $u^{(0)}$ vektörünün yönelimi ise keyfidir.

.... $(K-D) M$ $-W$
 u_3 ile u_3 paralel olursa ($\alpha_k = 0$ ise), u_1 tekliliğini yitirir. Bu durumda, ekleme (k) döner ise, genelliği bozmadan $d_k = 0$ alınabilir. Fakat, ekleme (k) kayar ise, d_k değişken olur ve $d_k = 0$ referans konumu keyfi olarak seçilir.

(iv) u_1 ile $u_3^{(k)}$ çakışık olursa da, u_1 tekliliğini yitirir. Bu durumda, ekleme (k) döner ise, yine genelliği bozmadan $d_k = 0$ alınabilir; ayrıca $\theta_k = 0$ referans konumu keyfi olarak seçilir. Ekleme (k) kayar ise, bu kez, genelliği bozmadan $\theta_k = 0$ alınabilir; ayrıca $d_k = 0$ referans konumu keyfi olarak seçilir.

(v) u_1 ile $u_3^{(k)}$ dik olarak kesişirse ($\alpha_k = 0$ olursa), u_1 'nin doğrultusu belli (söz konusu iki ekleme eksenine dik), ancak bu doğrultu üzerindeki yönü keyfi olur.

Bu durumda,

$$u_1 = u_3 \times U_3 \text{ olarak alırsa, } \alpha_k = 90 \text{ olur.}$$

$$u_1 = U_3 \times U_3 \text{ olarak alırsa, } \alpha_k = -90 \text{ olur.}$$

(vi) Son uzva (el'e) bağlı eksen takımının (F_n 'nin) "bilek noktası" olarak tanımlanan orijini $O_n = O_{n-1}$ olarak alınır. El'in özel adlarla anılan temel birim vektörleri ise şunlardır:

$$\text{Yaklaşır vektörü: } u_a = U_3 = U_3$$

$$\text{Yönelim vektörü: } u_o = U_2$$

$$\text{Normal vektör: } u_n = U_1$$

El'in uç noktası (P) ise, el'e göre,

vektörüyle gösterilebilir. Bir çok durumda, P noktası yaklaşım eksenini üzerinde olur $r_p = \overrightarrow{O_n P}$ ve dolayısıyla

$$r_p = d_p u_a \text{ yazılabilir.}$$

HD (1) yönteminin şekil 4'te şematik olarak gösterilen, 5 döner ve 1 kayar eklemeden oluşan "Stanford" tipindeki bir robot kola uygulanmasıyla belirlenen uzuv parametreleri ve ekleme değişkenleri aşağıda verilmiştir.

$a_1 = 0$, $a_2 = -90$, $d_1 = 0$, 9_1 : değişken.

$a_2 = 0$, $K_2 = +90$, $d_2 = 0$, $O_2 = \text{sabit}$, 9_2 : değişken.

$a_3 = 0$, $cc_3 = +0$, $d_3 = O_2 O_3 = \text{değişken}$, $0_3 = 0$.

$a_4 = 0$, $cc_4 = -90$, $d_4 = 0$, 6_4 : değişken.

$a_5 = 0$, $cc_5 = +90$, $d_5 = 0$, 9_5 : değişken.

$a_6 = 0$, $a_6 = +0$, $d_6 = 0$, 9_6 : değişken.

5. Uzuvlar Arası Kinematik

Uzuv (k)'nin uzuv (k-1)'e göre konumu, iki dönme ve iki ötelenme ile belirlenir. Dönmeler, önce u^3 etrafında 9_k , sonra u^3 etrafında « k biçimindedir. Dolayısıyla, iki uzuv arasındaki dönme matrisi,

$$R_k = C^{(k-1,k)} = e^{3 \cdot k} e^{\cdot} \quad (19)$$

olarak elde edilir. Ötelenmelerin (d_k ve a_k) bileşkesi ise,

$$\vec{r}_k = O_{k-1} O_k = d_k u_3 + a_k u_1 \quad (20)$$

vektörüyle ifade edilir. Bu vektörün F_{k-1} 'de kolon olarak ifadesi şöyledir.

$$\vec{r}_k^{(k-1)} = d_k \vec{u}_3 + a_k \hat{R}_k \vec{u}_1 \quad (21)$$

Öteyandan, dönme ve ötelenme ifadeleri birleştirilerek aşağıdaki uzuvdan uzva homojen dönüşüm matrisi elde edilir:

$$\hat{H}_k = \hat{H}_{O_{k-1} O_k} = \begin{bmatrix} \hat{R}_k & \vec{r}_k^{(k-1)} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Bu matrisin gerekli işlemler yapıldıktan sonra elde edilen açık biçimi şöyledir.

$$\hat{H}_k = \begin{bmatrix} c8_k & -a_k s9_k & s_{cc_k} s9_k & |c| \\ s9_k & c_{cc_k} c9_k - s_{cc_k} c9_k & a_k s9_k & \\ 0 & s_{cc_k} & c_{cc_k} & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Burada gösterim kolaylığı sağlaması için $\cos 0$ ve $\sin 0$ yerine $c0$ ve $s0$ kullanılmıştır.

6. El'in Konumunun Belirtilmesi (Düz Kinematik)

El'in konumunun, yani yöneliminin ve genellikle uç ya da bilek noktası olarak alınan uygun bir noktasının koordinatlarının eklem değişkenleri cinsinden ifade edilmesi, "düz kinematik" olarak alınır.

El'in zemine göre yönelimi, $\hat{C} = \hat{C}^{(0,nn)}$ matrisi, yada $\vec{u}_n = \hat{C} \vec{u}_n^*$, $\vec{n}_o = \hat{C} \vec{n}_o^*$, $\vec{u}_a = \hat{C} \vec{u}_a^*$

kolonları ile bilek ve uç noktalarının ko-

numları ise $r = O_o O_n$ ve $P = \vec{O}^* P$ vektörleri ya da zemin eksen takımında $F = r^{(0)}$ ve $p = p^{(a)}$ kolonları ile gösterilecek olursa; el'in konumu, denklem (19) ve (21)'deki tanımlar kullanılarak şu denklemlerle ifade edilebilir:

$$\hat{C} = \hat{R}_1 \hat{R}_2 \dots \hat{R}_n \quad (24)$$

$$\vec{u}_n = \hat{C} \vec{u}_1, \vec{u}_o = \hat{C} \vec{u}_2, \vec{u}_a = \hat{C} \vec{u}_3 \quad (25)$$

$$\vec{r} = \vec{n}^{(0)} + \hat{C} \vec{r}_2^{(0,1)} + \dots + \vec{r}_e^{(0,5)} \quad (26)$$

$$\vec{p} = \vec{r} + d_p \hat{C} \vec{u}_3 \quad (27)$$

tiyim, yapılarak ve röboftollarda son uzuv için $a_n = d_n = 0$ olduğu göz önüne alınarak denklem (25) şöyle de yazılabilir:

$$\vec{r} = V. \langle \vec{u}_3 + a_k \hat{R}_k \vec{u}_1 \rangle \quad (28)$$

Ote yandan, büyütülmüş 4'lü kolonlar ve denklem (22) ile tanımlanan 4×4 'lük homojen dönüşüm matrisleri kullanılarak (24) - (28) sayılı denklem takımı yerine, aşağıdaki daha derleşik denklem takımı da yazılabilir:

$$\hat{A} = \hat{H}_{O_o O_n} = \hat{H}_1 \hat{H}_2 \dots \hat{H}_n; \quad (29)$$

$$P = R_{O_o} P = A R_{O_n} P = d_p \hat{A} \vec{u}_3 \quad (30)$$

Her ne kadar, (29) ve (30) sayılı denklemler, her tür robot kol için el'in konumunu veren genel ve derleşik bir denklem takımı oluşturuyorlarsa da, göz önüne alınan belli bir robot kolun yapısal özelliklerinden yararlanılarak sadeleştirilmiş ifadeler elde etmeye olanak sağlamamaktadırlar.

Oysa; (24), (28), (25), ve (27) sayılı denklemler, cebirsel işlemler ve sadeleştirmeler yapmaya elverişlidirler. Sadeleştirmeler, temel kolonlar ile temel dönme matrisleri arasında bulunan aşağıdaki özdeşliklerden yararlanılarak yapılabilir. [6]:

$$e^{\vec{u}_i \phi} \vec{u}_i = \vec{u}_i \quad (31)$$

$$e^{\vec{u}_i \phi} \vec{u}_j = \vec{u}_j + \phi \vec{u}_i \quad (32)$$

$$e^{\vec{u}_i \phi} e^{\vec{u}_i \theta} = e^{\vec{u}_i (\phi + \theta)} \quad (33)$$

$$e^{\vec{u}_i \phi/2} \vec{u}_j = \vec{u}_j + \phi \vec{u}_i \quad (34)$$

Denklem (32) ve (34)'te $i \neq j$ ve $\vec{u}_k = \vec{u}_i \times \vec{u}_j$ dir.

Örneğin, şekil 4'te gösterilen Stanford tipi robot kol için, yukarıdaki özdeşliklerin kullanılmasıyla, (24), (28), ve (27) sayılı denklemlerden aşağıdaki sadeleştirilmiş ifadeler elde edilir:

$$\hat{C} = e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} e^{\tilde{u}_3 \theta_6} \quad (35)$$

$$\bar{r} = d_2 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} \bar{u}_2 + d_3 e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} \bar{u}_3; \quad (36)$$

$$\bar{r} = \bar{u}_1 (d_3 c \theta_1, s \theta_1 - d_2 s \theta_1, s \theta_1) + \bar{u}_2 (d_3 s \theta_1, s \theta_1 + d_2 s \theta_1, s \theta_1) + \bar{u}_3 (d_3 c \theta_1, s \theta_1, s \theta_1) \quad (37)$$

$$\bar{p} = \bar{r} + d_p e^{\tilde{u}_3 \theta_1} e^{\tilde{u}_2 \theta_2} e^{\tilde{u}_3 \theta_4} e^{\tilde{u}_2 \theta_5} \bar{u}_3 \quad (38)$$

Yukarıdakilere benzeyen ve yalnızca ikinci ve üçüncü temel dönme matrislerini içeren sadeleştirilmiş ifadeler, diğer robot kol tipleri (örneğin PUMA 560) için de elde edilebilirler [11].

7. Eklem Değişkenlerinin Belirlenmesi (Ters Kinematik)

El'in belirtilen bir konumunu sağlayan eklem değişkenlerinin bulunması, "ters kinematik" ya da "evrik kinematik" olarak anılır, iş tanımı el'in hareketleriyle, robot kolun bu iş için kontrolü ise eklem değişkenleri üstünde yapıldığı için ters kinematik, robotik alanında oldukça önemli bir yer tutmaktadır.

El'in konumu genellikle uç noktası P'nin koordinatlarından oluşan P kolunu; yönelimi ise, daha çok 323, bazan da 123 düzenindeki Euler açılarıyla oluşturulan \hat{C} matrisi ile belirtilir. \hat{C} matrisi; yaklaşım, yönelim, ve normal birim vektörleri belirtilerek

$$\hat{C} = [\bar{U}_n \bar{U}_o \bar{U}_a] \quad (39)$$

biçiminde de oluşturulabilir. Ayrıca, p ve C bilgilerinden yararlanılarak bilek noktası o_n 'nin koordinatlarını içeren

$$\bar{r} = \bar{p} - d_p \hat{C} \bar{u}_3 \quad (40)$$

kolunu da oluşturulur. Daha sonra, T ve \hat{C} 'ye karşılık gelen eklem değişkenleri, (24) ve (28) sayılı denklemler aracılığı ile belirlenir.

Burada, ele alınan robot kolun serbestlik derecesine göre şu üç durum söz konusu olmaktadır:

- (i) Tam serbestlikli kol ($n = 6$).
- (ii) Eksik serbestlikli kol ($n < 6$).
- (iii) Fazla serbestlikli kol ($n > 6$).

Robot kol, tam serbestlikli ise, (24) ve (28) sayılı denklemler, 6 eklem değişkeni için çözülür. Çözüm ilişkili hususlardan ileride söz edilecektir.

Robot kol, eksik serbestlikli ise, uç noktasının koordinatları ve Euler açıları ($P_1, P_2, P_3; \theta_1, \theta_2,$

θ_3) arasından yalnızca uygun görülen n tanesi belirtilir; geri kalan ($6 - n$) tanesi, n eklem değişkeni ile birlikte, (24) ve (28) sayılı denklemler çözülerek bulunur.

Robot kol fazla serbestlikli ise, şu iki yoldan biri seçilebilir:

(i) Eklem değişkenlerinden uygun görülen ($n - 6$) tanesi keyfi olarak seçilir; geri kalan 6 tanesi, (24) ve (28) sayılı denklemler çözülerek bulunur.

(ii) (24) ve (28) sayılı denklemlerin oluşturduğu kısıtlamaya uyacak biçimde ve belli bir kritere göre (örneğin eklem hareketlerini minimum yapmak üzere) optimizasyon yapılarak eklem değişkenleri belirlenir [5].

(24) ve (28) sayılı denklemlerin çözümüne gelince göze çarpan ilk husus, bu denklemlerin genelde bağılaşık ve lineer olmayan bir sistem oluşturmalarıdır. Bu nedenle, çözüm tek olmadığı gibi, söz konusu robot kolun bazı konumlarında belirsiz duruma da düşmektedir. Bu denklemleri çözmek üzere, cebirsel ya da sayısal yöntemler kullanılabilir. Doğal olarak, kullanım kolaylığının yamsıra, çoğul ve belirsiz eklem konumlarını açıkça göstermesi bakımından cebirsel çözüm her zaman tercih edilir. Ancak, cebirsel çözüm, bazı robot kol tipleri için elde edilememektedir. Böyle bir robot kol için zorunlu olarak sayısal iteratif yöntemlerle çözüm elde edilmesine çalışılır.

Cebirsel çözüm elde edebilmek için gerekli olmayan ancak yeterli bir koşul, robot kolda küresel bilek kullanılmış olmasıdır [8]. Küresel bileğin özelliği, şekil 4'teki Stanford kolunda olduğu gibi, son üç eklem ekseninin tek bir noktada (bilek noktasında) kesişmesidir. Küresel bilekli kolların en önemli özelliği, eklem değişkenlerinin kol ve bilek değişkenleri olarak adlandırılabilen iki gruba ayrılmasıdır. Kol değişkenleri (ilk $n - 3$ eklem değişkeni), bilek noktasının zemine göre konumunu belirlerler. Bilek değişkenleri (son 3 açısal eklem değişkeni) ise, el'in azu ($n - 3$)'e göre yönelimini belirlerler. Küresel bilekli kollarla denklem (28), yalnızca kol değişkenlerini içerir ve denklem (24)'ten bağımsız hale gelir. Denklem (24) ise, kol değişkenleri her hangi bir biçimde bulunarak verildiğinde,

$$\hat{R}_{n-2} \hat{R}_{n-1} \hat{R}_n = \hat{R}_{n-3} \dots \hat{R}_2 \hat{R}_1 \hat{C} = \hat{C}^* \quad (41)$$

biçiminde yazılarak bilek değişkenlerinin ($0_{p,2}, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n$) bulunması için kullanılır. Örneğin, 6 serbestlik dereceli ve küresel bilekli bir robot kolda, kol değişkenleri denklem (28) çözülerek; bilek değişkenleri ise, denklem (41) çözülerek bulunur.

Küresel bilekli ve 6 serbestlik dereceli tipik bir kol, şekil 4'te gösterilen Stanford tipi robot koldur. Denklem (28) ve (41), bu kol için, denklem (35) ve (36)'dan yola çıkılarak şöyle yazılabilir:

$$d_2 \bar{u}_2 + d_3 e^{\bar{u}_2 \theta_2} \bar{u}_3 = e^{\bar{u}_3 \theta_1} \bar{r}; \quad (42)$$

$$e^{\bar{u}_3 \theta_1} \bar{V}^2 e^{\bar{u}_2 \theta_2} \bar{V}^3 e^{\bar{u}_1 \theta_1} = e^{\bar{u}_2 \theta_2} e^{\bar{u}_3 \theta_1} \hat{C} = \hat{C}^* \quad (43)$$

Bu denklemlerden aşağıdaki skalar denklemler elde edilir:

$$d_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad (44.a)$$

$$d_3 \sin \theta_2 = r_2 \sin \theta_2 + r_3 \cos \theta_2, \quad (44.b)$$

$$d_3 \cos \theta_2 = r_3. \quad (44.c)$$

$$c_4 \sin \theta_5 = C_{13}, \quad (45.a)$$

$$s_4 \sin \theta_5 = C_{23}, \quad (45.b)$$

$$c_5 \theta_5 = C_{33}, \quad (45.c)$$

$$s_4 \sin \theta_5 = C_{32}, \quad (45.d)$$

$$c_4 \sin \theta_5 = -C_{31}. \quad (45.e)$$

Bu denklemlerin çözümünden de eklem değişkenleri, aşağıdaki gibi bulunurlar:

$$\theta_2 = \arccos \left(\frac{d_2}{r_{12}} \right) - \theta_1; \quad (46)$$

$$o_2 = +1 \text{ veya } -1,$$

$$r_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2},$$

$$\theta_1 = \arctan_2(r_1, r_2).$$

$$o_2 = \arctan_2(r_2 \sin \theta_2 + r_3 \cos \theta_2, r_3). \quad (47)$$

$$d_3 = o_3 \sqrt{(r_2 \sin \theta_2 + r_3 \cos \theta_2)^2 + r_3^2}; \quad (48)$$

$$o_3 = +1 \text{ veya } -1.$$

$$\theta_5 = \arccos(C_{33}); \quad (49)$$

$$o_5 = +1 \text{ veya } -1. \quad (50)$$

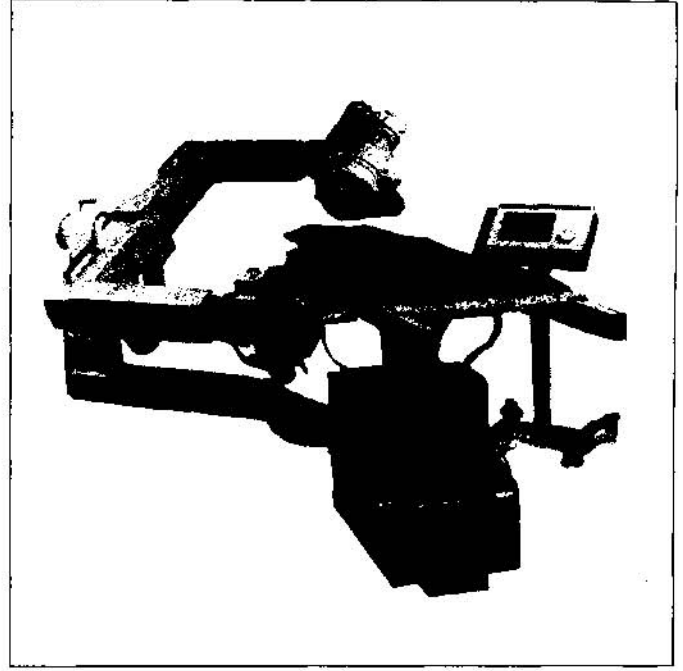
$$\theta_4 = \arctan_2(G_5 C_{23}, a_5 C_4).$$

$$\theta_6 = \arctan_2(o_5 C_{32}, -o_5 C_3).$$

Yukarıdaki ifadelerde, $\arctan_2(y, x)$, iki argümanlı arktanjanant fonksiyonunu göstermektedir. Bu fonksiyonla y ile x argümanlarının işaretleri ayrı ayrı göz önüne alınarak ilgili açının bulunduğu çeyrek düzlem doğru olarak belirlenir [7].

(46) - (51) denklemleriyle verilen çözüm, aynı zamanda aşağıda açıklanan çoğul ve belirsiz eklem konumlarını da göstermektedir.

a) Çoğul eklem konumları: Bu konumlar, denklem (46), (48), ve (49)'da yer alan o_1 , o_3 , ve a_5 işaret belirsizlikleri ile gösterilmiştir. Bunlardan o_3 ve G_5 , Stanford kolunun fiziksel yapısı nedeniyle, uygu-



lamada ancak (+1) değerini alabilmektedirler. Fakat o_1 her iki değerini de alabilir ve şu iki farklı kol konumuna yol açar:

(i) Sol omuzlu kol: $o_1 = +1$.

(ii) Sağ omuzlu kol: $o_1 = -1$.

b) Belirsiz eklem konumları: Bu konumlar, o_6 , o_4 , ve a_2 değişkenlerinde ortaya çıkmaktadır. Bu değişkenleri veren (51), (50), ve (47) sayılı denklemlerde yer alan $\arctan_2(y, x)$ fonksiyonunda y ve x aynı anda sıfır olursa, ilgili değişken belirsiz olur. Buna göre, şu iki farklı belirsiz eklem konumu meydana gelir:

(i) $r_2 \sin \theta_2 + r_3 \cos \theta_2 = 0$ ve $r_3 = 0$

Bu konumda $d_3 = 0$ olur ve θ_2 , her hangi bir değeri keyfi olarak alabilir. Diğer bir deyişle, $d_3 = 0$ olunca, θ_2 'nin bilek noktasının yeri üzerindeki etkisi kaybolur.

(ii) $\sin \theta_5 = 0$

Bu durum fiziksel olarak $\theta_5 = 0$ iken ortaya çıkar. $\theta_5 = \pm 180$ olmasına Stanford kolunun yapısı elvermez. Bu durumda, her ne kadar θ_4 ve θ_6 belirsizleşseler de, ikisinin toplamı yine de belirli bir değer olarak bulunabilir. Bu amaçla, $\theta_5 = 0$ için denklem (43),

$$e^{U^3 e} V^{396} = e^{U^3 (e \ll e \langle \rangle)} = \hat{C}^* \quad (52)$$

biçiminde yazılır ve buradan

$$e_4 + 6_6 = 6_{46} = \text{atan}_2(C_{21}, C_J) \quad (53)$$

olarak bulunur. Denklem (52)'den de görüldüğü gibi, $9_5 = 0$ iken, 6_4 ve 0_6 açıları, aynı eksen etrafında oluşan dönüşler durumuna düştükleri için farklılıklarını yitirirler ve bu nedenle de ayrı ayrı belirlenemezler. Ancak, ikisinden biri keyfi olarak seçilip diğeri onun 6_{46} 'ya göre tümleyeni olarak bulunur. Diğer bir deyişle, $9_5 = 0$ olunca, 6_4 ve 8_6 açılarından birinin el'in yönelimi üzerindeki etkisi kaybolur.

KAYNAKLAR

1. Asada, H. and J.J.E. Slotine, "Robot Analysis and Control", John Wiley, 1986.
2. Craig, J.J. "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", Addison Wesley, 1986.
3. Fu, K.S., R.C. Gonzales, C.S.G. Lee, "Robotics: Control, Sensing, Vision, Intelligence". McGraw-Hill, 1987.
4. Hartenberg, R.S. and J. Denavit, "Kinematic Synthesis of Linkages", McGraw-Hill, 1964.
5. Özgören, M.K., "Optimization of Manipulator Motions", Proceedings of the 2nd CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, Warsaw, Poland, 1976.
6. Özgören, M.K., "Application of Exponential Rotation Matrices to the Kinematic Analysis of Manipulators". 7th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Sevilla, Spain, 1987.
7. Paul, R.P., "Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control", The MIT Press, 1981.
8. Pieper, D., "The Kinematics of Manipulators under Computer Control", Ph.D. Thesis, Stanford University, 1968.
9. Shahinpoor, M., "A Robot Engineering Textbook", Harper and Row, 1987.
10. Wolovich, W.A., "Robotics: Basic Analysis and Design", HRW (Holt, Rinehart, Winston), 1987.
11. Özgören, M.K., "Lecture Notes on Robotics, ME 522 dersinin basılmamış notları, Makina Müh. Böl., ODTÜ.



ÖNDER GÜLSOY
(2069)

28.02.1932 yılında Turgutlu'da doğdu. İlk ve orta eğitimini Turgutlu'da, Lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 1.11.1963 yılında İTÜ Elektrik Bölümünden mezun oldu. 1966-68 yıllarında Turgutlu ESHOT işletmesinde Müdür olarak görev yaptıktan sonra serbest olarak çalışmaya başladı. Evi ve 2 çocuk babası GÜLSOY, aramızdan ayrıldı.

AİLESİNE, YAKINLARINA VE ODAMIZ TOPLULUĞUNA BAŞSAĞLIĞI DİLERİZ.



NECDET BAKI
(8875)

29.01.1955 tarihinde İzmir'de doğdu. İzmir'de tamamladığı ilk ve orta eğitiminden sonra Mithatpaşa End. Meslek Lisesini bitirdi. 1979 yılında A.D.M.M.A. Elektrik Bölümünden mezun oldu. Mezuniyetinden itibaren ücretli olarak özel işyerlerinde çalıştı. Evi ve 1 çocuk babası Necdet BAKI yakalandığı hastalığa yenik düşerek aramızdan ayrıldı.

AİLESİNE, YAKINLARINA VE ODAMIZ TOPLULUĞUNA BAŞSAĞLIĞI DİLERİZ.