UDK: 621,8.028

Lineer-Olmayan Elektrik Devrelerinde Optimum Dinamik Kararlılık

yazan:
Necdet ŞEN
Enek. Y. Müh.

ÖZET:

Dinamik bir sistemin kurulması ve çalışmasında karşılaşılan en önemli problem, sistem performansının en iyi olmast ve bu durumda kararlı kalabilmesidir. Bu yazıda genel koşullardaki bir sistemin optimum dinamik kararlılığı için gerekli matematik bağıntılar araştırılmıştır. Lineer-olmayan BLCM devreleri örnek olarak alınmış ve kanonik vektör -matris sistem denklemleri fonksiyonel biçimde yapılmıştır. Yeni bir tip Liapunov Fonksiyonati tanımlanarak Pontryagin ve Hamilton - Jacobi Denklemleri devrenin kapalı -çevre modelinin optimum kararlılığı araştırılmıştır.

SUMMARY:

in the desing and operation of a dynamical system, the most important problem is the optimum system performance whllst maintaining system •stabüity. The a-uthor investigated the necessary mathematical relationships for optimum dynamical stability under general conditUms. A non - linear BLCM netıoork is given as an example and, the canonical matrix - vector equations are presented in functional from. A nem type of Liapunov functional has been devised. Further, the stability of a close-loop model of a non-hnear nettoork is optimized by the Pontryagin Prindple and Hamilton - Jacobi Eguations.

Sembollerin tanıtım sırası:

K	:	durum vektörü
–	:	kaynak vektörü
$(\cdot)$	:	türev
	:	zaman
i, e	:	akım ve gerilim kaynakları vektörü
D	:	topolojik ağaç dalları ve bağları İlgiyi belirten ve elemanları ± 1,0 olan topolojik transformasyon matrisi
V	:	LJapunov skaler fonksiyonu
V, P	:	skaler potansiyel fonksiyonu
<·>	:	İM vektörün iç çarpımı
V	:	gradyen operatörü
W	:	L ve C glftTnıı.nin.nmn köşegen matrisleri köşegen olan matrisleri
H, £	:	Hamilton ve Lagrangian fonksiyonları
P	:	Raylelgh kayıp fonksiyonu
Φ	:	toplam kayıp fonksiyonu
λ	:	çarpan vektör (Lagrage çarpanları vektörü gibi)
1,2	:	topolojik ağacın bağ ve dallarını gösteren İndisler.

Giriş:

Zaman değişkenli lineer-olmayan sistemler genel olarak vektör-matris gösterilimi ile kanonik biçimde

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

gibi bir diferansiyel denklem ile belirtilebilirler. Genelleştirilmiş devreler teorisi bakımından x durum vektörünün bileşenleri, devrenin lineer grafmdan seçilen normal topolojik ağaçtaki maximum sayıdaki kapasitanslann gerilimleri ve bu ağacın bağlarındaki masdmum sayıdaki indüktanslann akımları, u vektörünün bileşenleri ise, sistemi uyaran bağımsız akım ve gerilim kaynakları vektörleri olup [1, 2, 3],

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{tL}(t) \\ v_{tC}(t) \end{bmatrix}, \qquad u(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

biçimlerinde yazılabilirler, Genel tipten lineer-olmayan bir RLCM devresinin çeşitli biçimlerde devre denklemlerini geliştirmek mümkündür (Parametrlk Analiz [2, 3], Hamilton - Lagrange - Jacobi [9] gibi)

Buradaki düşüncemiz dinamik kararlılık durumunu ve onun optimumlaştırılması olup, Liapunov Kararlılık Teoremine deyineceğimizden, bu teoremin dayandığı temel kavram olan enerji düşüncesinden hareket edeceğiz [4,5].

Kirchhoff Denklemleri, Potansiyel Fonksiyonu ve Topolojisi:

Kirdhhoff'un Akım ve Gerilim Postülalanndan hareketle [1, 2], (3) denklemlerini yazmak mümkündür.

$$\begin{bmatrix} -v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & D \\ D^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad \text{......... (3)}$$

Bu denklanı çok değişkenli bir fonksiyon düşüncesi ile [8], (4) gibi bir iççarpımın integrali olan bir skaler fonksiyon olarak yazılabilir.

$$V(i_1, v_2, t) = \int_{0,0}^{i_1, v_2} \left\langle \begin{bmatrix} 0 & D \\ D^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, d \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad \text{......... (4)}$$

Bu bağıntıya dikkat edilirse Moser'in [6] lineer-olmayan devreler için elemanter devre düşüncesiyle klasik biçimde yazdığı (5) deki $P(v_c, i_L)$ potansiyel fonksiyonunun benzeridir.

$$k(i_L)\, i_L = \frac{\partial P(v_c, i_L)}{\partial i_L} \qquad \text{......... (5)}$$

$$-C(v_c)\, \dot{v}_c = \frac{\partial P(v_c, i_L)}{\partial v_c}$$

(4) ıntegrali ile tanımlanan fonksiyon bir çizgizel integral olup yola bağU değildir ve bağımsız v_2 ve ij değişkenleri cinsinden genel olarak (6) daki gibi yazılabilir.

$$V(i_1, v_2, t) = \left\langle D_{12}^t v_2, i_2 \right\rangle \qquad \text{......... (6)}$$

Amacımız denge konumundaki kararlılık durumunu aramak olduğuna göre zorlanmamış bir sistemde (u = 0) yukardaki potansiyel fonksiyonu topolojik olarak (7) deki gibi tekrar yazılabilir.

$$V(i_1, v_2, t) = P(i_1, v_2, t) = \left\langle \begin{bmatrix} D_{1C2C} & 0 & 0 \\ D_{1R2C} & D_{1R2R} & 0 \\ D_{1L2C} & D_{1L2R} & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2C} \\ v_{2R} \\ v_{1L} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i_{1C} \\ i_{1R} \\ i_{1L} \end{bmatrix} \right\rangle$$

Burada bağımlı kaynaklan pasiv elemanların akım ve gerilim fonksiyonları ile belirttiğimizi kabul ediyoruz. (7) denklemlerine dikkat edilirse akım vektörünün bileşenlerine göre gradyeni Kirchhoff'un Akım ve Gerilimler Kanunu olarak ortaya çıkar. Böylece (1) denklemlerine benzeterek kolayca (8) elde edilir.

$$\begin{bmatrix} v_L \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{i_L} P(v_2, i_1, t) \\ -\nabla_{v_c} P(v_c, i_1, t) \end{bmatrix}$$

veya $\qquad \text{......... (8)}$

$$\begin{bmatrix} v_L \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(i_L, t)\, \dot{i}_L \\ C(v_c, t)\, \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{i_L} P(v_c, i_L, t) \\ -\nabla_{v_c} P(v_c, i_L, t) \end{bmatrix}$$

Moser bu denldemlerl yararken devreyi elemanter olarak düşünmüş, ve tünel dlyot devrelerine uygulamıştı. Gerçekte bu denklemleri geniş olarak ele alıp saf kapasltans öz-çevreleri ve öz-indüktans kesitleri için ve yine bağımlı kaynaklan da İşe karıştırarak yazmak mümkün olabilir. (8) den hareketle (1) tipindeki denklemler (9) dakl gibi yazılabilir.

$$\dot{x} = \Psi^{-1}(x, t) \nabla_x P(x, t) \qquad \text{....... (9)}$$

burada
$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} L(i_{1L}, t) & 0 \\ 0 & -C(v_{2C}, t) \end{bmatrix} \qquad \text{......(10)}$$

olarak yazılabilir. Denge konumunun kararlılığı düşünülerek lineer-olmayan bir RLCM devresinin potansiyel fonksiyonu

$$P\left(\begin{bmatrix} v_{2C} \\ i_{1L} \end{bmatrix}, t \right) = P(x, t) = \left\langle D_{1L2C} v_{2C}, i_{1L} \right\rangle + \int_0^{i_L} \left\langle \begin{bmatrix} 0 & \\ D_{1R2C} & 0 \end{bmatrix} \ldots, d \ldots \right\rangle$$

durumuna gelir. Bu denklemin sağ tarafının birinci terimi reaktif elemanların ikinci terimi ise direnç sınıfından olan (girator, ideal transformatör, NIC ve alçak frekans bölgesine küple direnç elemanları gibi modellendirilen tüb ve transisitorlar) devre elemanlarına aittir. Bu İntegral terim Hamllton - Lagrange dinamlğindeki Rayleigh kayıp fonksiyonlarının aynıdır (toplam kayıp fonksiyonu) [9].

Liapunov Fonksiyonunun Seçilişi [4, 5] :

V(x, t) Liapunov Fonksiyonu skaler bir fonksiyon olup x.;^0 olmak üzere pozitiv-definit bir fonksiyondur. V(0) = 0dir. Liapunov 2ci metoduna göre eğer bu fonksiyonun birinci zaman türevi x^;0 olmak üzere negatif ise (1) deki gibi tanımlanan dinamik bir sistem aslmptotik olarak kararlıdır.

Genel tip bir RLCM devresinin u = 0 alınarak Tellegen Teoremi [11] uygulanırsa devrenin akım ve gerilimleri arasında (12) deki gibi iççarpım bağıntısı elde edilir.

$$\langle i, v \rangle = 0 = \langle i_c, v_c \rangle + \langle v_L, i_L \rangle + \langle i_R, v_R \rangle \qquad \text{......... (12)}$$

Bu denklem kolayca (13) durumuna getirilebilir*

$$\frac{d}{dt} \int_{0,0}^{v_c, i_L} \left\langle \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix}, d \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \right\rangle = -\langle i_R, R\, i_R \rangle - \sum F(i_L, v_c) \qquad \text{......(13)}$$

$$\Phi(x) = \dot{V}$$

Bu denklem Hamilton - Lagrange Denklemlerinden bulunabilen sonucun aynıdır* ve (14) deki gibi yazılabilir (u = 0 olmak üzere).

-^-(Kinetik enerji) + ... (14)

$\frac{d}{dt}$(Potansiyel enerji) = — (Toplam kayıplar)

Bu son iki sonuç birbirlerinin aynı olup, denilebilir ki (13) deki sağ tarafın integrali pozitif-definlt olduğu zaman bir Liapunov fonksiyonu elde edilir.

Eğer sistemde bağımsız kaynaklar yoksa ve •: "(X, t) matrisi pozltif-definit ise ve yine dirençlerin •î^rekterlstikleri ile reaktif elemanların depoladıkla: enerji fonksiyonlarının karekteristikleri artan fonksiyonlar iseler sisteme tamamen kararlıdır gözü ile bakılabilir.

Optünumlaştırma [7,12] :

(1) deki gibi tanımlanan bir sistemde u(t) vektörü, bir kapalı-çevre kontrol sisteminin giriş, vektörü olsun. Bu, devre düşüncesi ile, 'bağımlı kaynakların var, bağımsızların sıfır olması anlamına gelir (bir osilatör devresi gibi). Bu durumda sistemin optimumlaştırılması (örneğin mlnimumlaştınlması) istenen Liapunov fonksiyonu,

$$\dot{V}(\underline{x}) = \langle \nabla_{\underline{x}} V(\underline{x}), f(\underline{x}, u(\underline{x})) \rangle = -\mathcal{L}(\underline{x}, u(\underline{x})) \qquad \text{......... (15)}$$

Olarak alınmakla

$$J = \int_0^{\infty} \mathcal{L}(\underline{x}, \underline{u}(x), t)\, dt \qquad \text{......... (16)}$$

performans indeksi fonksiyonu olarak yazılabilir. Diğer taraftan Pontryagin Prensibindeki düşünce ile Hamilton Kanonlk Denklemleri

$$\dot{\underline{x}} = \nabla_{\lambda} H(\underline{x}, \underline{u}(\underline{x}))$$

$$\text{......... (17)}$$

$$\dot{\underline{\lambda}} = -\nabla_{\underline{x}} H(\underline{x}, \underline{u}(\underline{x}))$$

yazılır; burada >. V V(x) abnarak Pontryagin Ponksiyonu

$$H = \langle \underline{\lambda}, f(\underline{x}, \underline{u}(x)) \rangle + \mathcal{L}(\underline{x}, u(\underline{x})) \qquad \text{.......... (18)}$$

biçiminde olup, Hamllton - Jacobl denklemlerine göre

H = 0 . . . . (19)

yazılarak optimum Liapunov fonksiyonu için (20) alınabilir,

$\mathcal{L}(\underline{x}, u(t))' = -$^ G/ O. { $\underline{x}, u(\underline{x}) \rangle$ . . . . (20)

böylece (16) için aranılan performans indeksi fonksiyonu bulunmuş olur. (9) daki devre denklemlerini ve (20) deki sonuç birleştirilirse

$$-\mathcal{L} = \langle \nabla_{\underline{x}} V(\underline{x}) \cdot \underline{W}^{-1}(\underline{x}) P(\underline{x}, u(\underline{x})) \rangle = \langle \nabla_{\underline{x}} \int_{t_0}^{t} \Phi(\underline{x})\, dt, \underline{W}^{-1}(\underline{x}) P(x, u, t) \rangle$$

elde edilir. Bu sonuç (16) da yerine konularak Lagrange tipi performance indeksi elde edilmiş olur. Problemin buradan sonrası bilinen bir Varyasyon Hesabı işlemi durumuna gelmektedir.

Sonsöz ve İrdeleme : Optimumlaştırma işleminde performans İndeksi fonksiyonalı bir Lagrange tipi olarak düşünülmüştür. Daha ileri bir çalışma olarak hangi durumlarda performans indeksinin Bolza tipi performans fonksiyonalı olarak ele alınıp alınamayacağı düşünülebilir. Ve yine gürültü kaynakları ve bozucu büyüklüklerin (1) denkleminde alınmış olduğu durumlarda problemin Stokastlk Optimumlaştırılması yapılabilir.

KAYNAKLAR:

1. **Bryant, P. R.: Order of Complexity of Electrical Netvvorks, Proc. IEE (London), Part C (105), pp 174-188, June 1959.**
2. **Kuh, E. S. - Rohrer, R. A.: The Stata Variable Approack to Network Analysis, Proc. IEEE, Vol. 53, pp. 672 - 686, july 1965.**
3. **Chua, L. O. - Rohrer, R. A.: On the Dynamlcal Equations of a Clasal of Nonlinear RLC Networks, IEEE Trans. CT-12, No. 4 pp. 475-489, Dec. 1965.**
4. **Hahn, W.: Theory and Applications of Liapunov*s Direct Method, Prentice-Hall, 1963.**
5. **Kalman, R. E. - Bertram, J. E.: Control System Analysis and Deslgn via the Second Method of Liapunov, Part I. Trans. ASME J. Bas. Eng. pp. 371 - 393, june 1960.**
6. **Moser, J. K.: On the Differential Equations of Electrical Circuits, and Global Nature of the Solutions, Int. Symp. on Nonlln. Mech. and Nonlinear Diff, Eqns 31 July - 4 Aug. 1961, pp. 147-154, Editör: S. Lefchetz-La Salle, Academic Press, 1963.**
7. **Aüıans, M. - Falb, P. L.: Optimal Control, 1966, McGraw-Hill.**
8. **Fleming, W. A.: Functions of Several Variables, Addison-Wesley 1965.**
9. **Şen, N.: Topologic Hamiltonian Analysis of Netvrork their Stability investigation by Liapunov Method IEEE llth. Mldvcest Symp. on Circuit Theory, May 13 - 14, 1968, Unlverslty of Nötre "Dame, Indiana, "U.S.A. Editör. IEEE CT Grub, pp. 390 - 398.**
10. **Şen, N.: Genel Tipten Elektrik Devrelerinin Durum Denklemleri ve Topolojik Çözümleri, Tur. Bil. ve Tek. Araş Ku. (TÜBİTAK) 1. Bil. Kong. Tebliğ, 4 - 6 Ekim, 1967, Ankara Üniversitesi, ve Ba. Bakan. «Bayındırlık İşleri Dergisi» Cilt. 44 - 8, 9, sayfa 32 - 38, 1968.**
11. **Tellegen, B.D.H.: A General Network Theorem \vith Applications, Philips Res. Rep. 7, 1952.**
12. **Weaver, L. F. - Schultz, D. C: NASA Contractor Rep. CR-193, Marc 1965, Wash. D.C. USA.**