

Geri Beslenmiş Sistem StaMlitesinde Köklerin Geometrik Yeri

Sevim TAN
Y. Müh.
O.D.T.Ü.

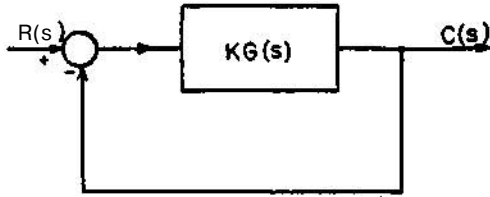
ÖZET :

Geri beslenmiş sistem stabilitesinde büyük önemi olan karakteristik denklem köklerinin açık çevre transfer fonksiyonu kazancı ile değişmesi, açık çevre sıfır ve kutupları bulunduğu taktirde denklemi çözmeksizin incelenmiş; neticenin mümkün olduğu kadar kolay ve çabuk elde edilmesini sağlayan çeşitli özellikler belirtilerek misallere uygulanmıştır.

Bir basit geri beslenmiş kontrol sistemi karakterize eden transfer fonksiyon genel olarak

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada Şekil 1 den görüleceği üzere, C (s) çıkan büyüklük Laplas Transformasyonunu R(s) giren büyüklük Laplas Transformasyonunu, KG (s) ise ileri sinyal yolundaki blokun transfer fonksiyonunu göstermektedir. K blokun kazancı yani transfer fonksiyonun s=0 konarak elde edilen değeridir.



Şekil: 1

Böyle bir sistemin davranışı $[1+KG(s)] C(s) = R(s)$ ifadesine tekabül eden diferansiyel denklemle belirlidir. Karakteristik denklem ise $1+KG(s)=0$ ifadesine tekabül etmektedir. Misal olarak $KG(s) = \frac{1}{1+s}$ kabul edelim.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+s} = \frac{1}{s+1} \text{ veya}$$

$(s+1) C(s) = R(s)$ elde edilir,

$$\frac{d}{dt} C(t) + 2C(t) = R(t)$$

şeklinde. Karakteristik denklem ise $s+2=0$ olarak bulunur; bu ifade ise misalimizde

$$1+KG(s) = 0 \text{ a tekabül eden } 1 + \frac{1}{s+1} = 0$$

dan başka birşey değildir. R (t) = 0 konularak elde edilen homogen diferansiyel denklemin genel çözümü, -2 karakteristik denklemin kökü, A da başlangıç şartlarının belirttiği bir sabit olmak üzere Ae^{-2t} şeklinde bulunur. Sistemin girişine tatbik edilen R(t) nin birim basamak fonksiyonu olması halinde esas diferansiyel

$$\frac{d}{dt} C(t) + 2C(t) = 1$$

denklemin bir özel çözümü $\frac{1}{2}$ olarak elde edil-

eceğinden genel çözüm $C(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2}$ olarak çıkar. Görülüyorki çözüm gerek başlangıç şartlara gerekse sisteme giren büyüklük olan R(t) ye tâbi olmıyan bir kısmı ihtiva etmektedir ki bu da karakteristik denklemin kökü olan -2 ile belirlidir.

Şekildeki blokun transfer fonksiyonunu K bir den farklı pozitif reel bir sayıyı göstermek üzere $\frac{K}{s+1}$ olarak kabul edersek, sistemin davranışını karakterize eden denklem

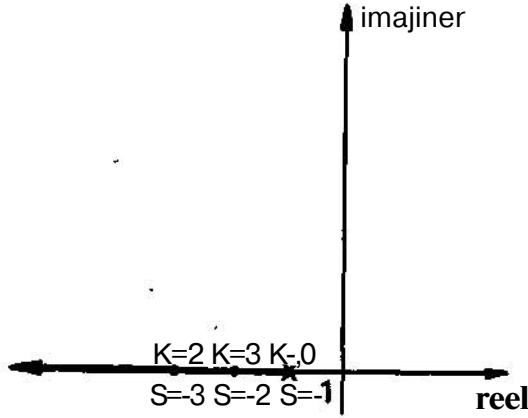
$$\frac{d}{dt} C(t) + (K+1) C(t) = R(t)$$

haline gelir.

Karakteristik denklem ise $s + (K+1) = 0$ dir ve homogen denklemin genel çözümü $Ae^{-s(K+1)}$ olarak elde edilecektir. Bu basit misal K nin sistem davranışı üzerine tesirini göstermektedir. K değeri büyüdükçe geçiş (transient) daha kısa müddet devam edecek, başka bir deyişle, R (t) nin meselâ birim basamak fonksiyonu olması halinde, çıkan büyüklük nisbeten daha kısa süren bir geçişi müteakip $\frac{1}{2}$ sabit değerine yaklaşacaktır.

Ele aldığımız misalde karakteristik denklemin çözümü hiçbir güçlük arz etmemiş bulunuyor. K ya muhtelif değerler vererek kökleri

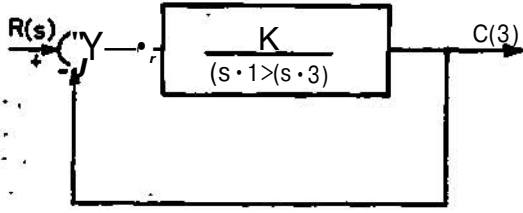
kompleks düzleme yerleştirirsek, geometrik yer Şekil 2 den görüleceği üzere reel eksenin bir kısmı olarak elde edilir. Gerek karakteristik denklemden gerekse Şekil 2 den görüldüğü gibi



Şekil: 2

tün pozitif ve reel K değerleri için sistem stabil kalacak yani karakteristik denklem pozitif reel veya reel kısmı pozitif olan kompleks köklere sahip olmayacaktır.

Aynı düşüncelerle Şekil 3 de görülen sistem



Şekil : 3

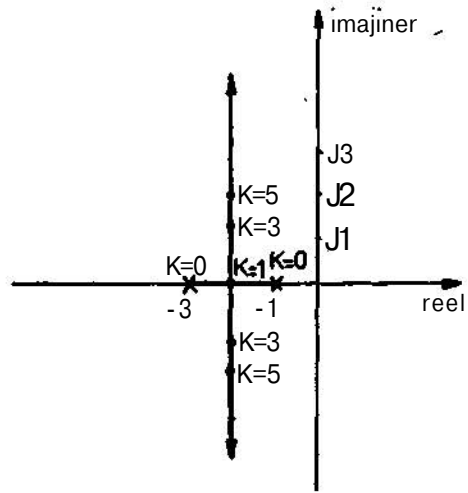
incelenirse Karakteristik denklem

$$1 + \frac{K}{(s+1)(s+3)} = 0 \text{ veya } (s+1)(s+3) + K = 0$$

olarak bulunur. K pozitif ve reel olarak değiştiği takdirde, kökler $-2 \pm \sqrt{1-K}$ ifadesinin belirttiği şekilde değişirler. K'nın sıfırla bir arasındaki değerleri için her iki kök de negatif değerlere sahiptir, bu takdirde geçiş eksponansiyel azalma şeklinde olacaktır. K'nın bir den büyük değerleri için ise homogen denklemin genel çözümü $e^{-\zeta \omega_n t} (\cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t)$ olarak bulunacağından, geçişin titreşimli olacağı fakat titreşim amplitüdünün zamanla eksponansiyel olarak azalacağı neticesi çıkar. Demekki bu sistem de stabil bir sistemdir. Karakteristik denklemi gerçekleyen s noktalarının geometrik yeri Şekil 4 de gösterilmiştir. K'nın sıfır değeri için kökler -3 ve -1 dir. K sıfırdan $+1$ değerine doğru artarken kökler birbirine yaklaşır, nihayet $K=1$ değeri için her iki kök de birbirine eşit ve -2 değerindedir. K'nın 1 den itibaren daha büyük değerler alması halinde, kök-

lerden biri üst diğeri alt yarı düzlemde kalmak üzere reel eksenden uzaklaşırlar. Böyle bir grafik birkere elde edildikten sonra istenilen geçiş davranışını gerçekleştirecek K değeri kolaylıkla tayin edilebilir.

Karakteristik denklemin ikinci dereceden daha yüksek olması halinde bahis mevzuu geometrik yerin çizilmesi, veya tatonman yoluyla belli bir davranışı gerçekleyen K değerinin tayini, komputer kullanılmasını icabettirecek kadar uzun hesapları gerektirebilir. Köklerin geometrik yeri (root-locus) adını taşıyan metot ise karakteristik denklemin çözümünü icabettirmeden geometrik yerin çizilmesini mümkün kılmaktadır.

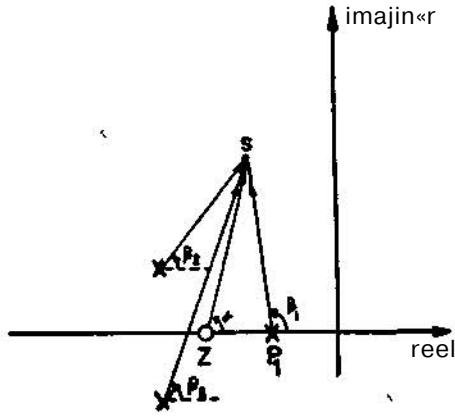


Şekil: 4

Metodun esası $1 + KG(s) = 0$ ifadesini sağlayan s değerlerinin aranması yerine, $KG(s)$ in açısını -180° veya m bir tam sayıyı göstermek üzere $-180^\circ - m360^\circ$ yapan s noktalarının aranması, daha sonra da bu açı şartını sağlayan her bir s noktasına tekabül eden ve $KG(s)$ in genliğini bir yapan K değerinin tayini üzerine dayanır. $1 + KG(s) = 0$ ifadesi yerine

$G(s) = -180^\circ - m360^\circ$ açı şartı ve $G(s) = \frac{1}{K}$ genlik şartı olmak üzere iki ayrı eşitliğin kullanılması geometrik yerin tayininde birçok kolaylık temin etmektedir.

Genel olarak bir sistemin açık çevre transfer fonksiyonu ele aldığımız misallerde olduğu gibi yalnız kutupları değil, sıfırları da ihtiva eder. Sistem açık çevre transfer fonksiyonu Şekil 5 de görüldüğü üzere Z sıfırını ve P_1, P_2, P_3 kutuplarını ihtiva ediyorsa, s geometrik yer üzerinde bulunup bulunmadığı araştırılan bir deneme noktası olmak üzere açı şartı:



şekil 5

$a - (\angle S_1 + \angle 2 + A) = -180^\circ - (-m360^\circ)$ olarak yazılabilir.

Bahis mevzuu s noktası için bir iletken ile «. P_1, P_2, P_3 açıları ölçülecek olursa eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı hesaplanabilir. Gayet basit bir alet olan Spirale ise yukarıdaki işlemi daha kolaylıkla yapabilmekte, şekil üzerinde gezdirildiğinde ayrıca toplama ve çıkarmayı gerektirmeden doğrudan doğruya sıfır ve kutup açıları arasındaki farkı göstermektedir. Bu fark $-180^\circ - (-m360^\circ)$ şartını gerçekleştirmediği takdirde, işlemin başka bir deneme noktası için tekrarlanmasının icabedeceği aşikârdır.

Açı şartını sağlayan noktaya tekabül eden K değeri $\frac{\overline{sZ}}{\overline{sP_1 \cdot sP_2 \cdot sP_3}} = \frac{1}{K}$ amplitüd şartından $\overline{sZ}, \overline{sP_1}, \overline{sP_2}, \overline{sP_3}$ mesafeleri ölçüldükten sonra hesaplanır. Eğer Spirale kullanılırsa bu işlemin daha kolaylıkla yapılması mümkündür.

Buraya kadar anlatılanlar geometrik yerin ancak ve ancak tatonman ile elde edilebileceğini gösteriyorsa da, aşağıda sıralayacağımız bir çok özellik işi kolaylaştırmakta, ve hâttâ bazı problemler hakiki geometrik yer yerine tayini çok kolay olan asimptotların ve birkaç özel noktanın bilinmesiyle kâfi bir yaklaşıklıkla çözülebilmektedir.

Özellikler kısaca şöyle özetlenebilir.

1) Geometrik yerin muhtelif branşları açık çevre transfer fonksiyonu kutuplarından başlar ve branş sayısı açık çevre transfer fonksiyonu kutuplarının sayısına eşittir:

Geometrik yer K nın değişen değerleri için $1 + KG(s) = 0$ ifadesini sağlayan s noktalarının teşkil ettiği düşünülürse, $K = 0$ olduğu takdirde eşitliğin sağlanması ancak $G(s)$ in sonsuz olmasıyla kabildir. $G(s)$ i sonsuz yapan s değerleri ise bu ifadenin kutuplarına eşit s değer-

leridir. Bu şekilde açık çevre kutuplarına geometrik yer üzerinde $K = 0$ değerinin tekabül edeceği görülüyor. Branşların sayısı ise belli bir K değeri için çözüm teşkil eden s değerlerinin sayısına eşittir, ki bu da $1 + KG(s) = 0$ ifadesinin derecesi demektir. Fizik olarak gerçekleştirilebilen sistemlerde $G(s)$ ifadesinin kutup sayısı sıfır sayısından yüksektir; bunun neticesi olarak da $1 + KG(s) = 0$ ifadesinin derecesinin aynı geometrik yer branş sayısının $G(s)$ in kutup sayısına eşit olacağı söylenebilir.

2) Açık çevre transfer fonksiyonu sıfırlara sahipse branşların bir kısmı bu sıfırlar üzerine kapanır, geriye kalan branşlar ise sonsuza uzanır:

Bu özellik de gene geometrik yer $1 + KG(s) = 0$ denklemini sağlayan s noktalarının teşkil ettiği düşünülerek gerçekleştirilebilir. K nın sonsuz büyük değerleri için bu ifadenin çözümleri $G(s)$ i sıfır kılan s değerler yani açık çevre sıfırlarıdır. Bu şekilde branşların bir kısmının K nın sonsuz büyük değeri için mevcut açık çevre sıfırlarına erişeceğini görmüş olduk. Geriye kalan açık çevre kutup ve sıfır sayıları arasındaki farka eşit sayıda branş sonsuza uzanır zira s nin sonsuz büyük değerleri de $G(s)$ i sıfır yapabilecektir.

3) Geometrik yerin sonsuza uzanan branşlarına ait asimptotları arasındaki açı $\frac{P - Z}{P - Z}$

dir. Burada P açık çevre kutupları, Z ise açık çevre sıfırları sayısını göstermektedir. Reel eksenle asimptotlara yaptığı en küçük açı ise 180°

—dir:
 $P - Z$

$1 + KG(s) = 0$ ifadesi $G(s) = -\frac{1}{K}$

şeklinde yazılabilir, s nin sonsuz büyük değerleri için $G(s) = \frac{1}{s^n}$ kabul

edilebilir. Bu ifadenin açı şartını sağlayabilmesi için $n = P - Z$ olmak üzere $\frac{1}{s^n}$ kabul

edilebilir. Bu ifadenin açı şartını sağlayabilmesi için $n = P - Z$ olması ile mümkündür.

Burada m ye muhtelif değerler verilerek muhtelif asimptotların reel eksenle yaptıkları açılar elde edilir. Asimptotlar arası açı ile asimptotların reel eksenle yaptığı en küçük açının değeri bu ifadede görülmektedir.

4) Asimptotların başlangıç noktasının reel eksen üzerinde ve açık çevre sıfır ve kutuplarının ağırlık merkezinde olduğu kabul edilebilir. Buna göre kutuplarda birim kütle, sıfırlarda birim negatif kütle bulunduğu ve p_1, p_2, p_3, \dots ün mevcut açık çevre kutupları, z_1, z_2, z_3, \dots ün de

sıfırlarının absislerini gösterdiği düşünülürse, başlangıç noktasının absisi $(P_1+P_2+P_3-\dots)-(Z_1+z_2+Z_3+\dots)$ ifadesi ile hesaplanabilir.

5) Sonsuza uzanan branşların iki veya daha fazla olması halinde yani $P-Z=n \geq 2$ ise kapalı çevre transfer fonksiyonu kutuplarının ağırlık merkezi K'nin değeri ne olursa olsun değişmez ve reel eksen üzerindedir:

Kapalı çevre transfer fonksiyonu Şek. 1 de görülen sistem için $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ dir. Bu ifade-

nin kutuplarının $1+KG(s)=0$ m kökleri olduğu aşikârdır. Bu köklerin s_1, s_2, s_3, \dots olduğunu kabul edelim. $G(s)$ ifadesi a ve b ler reel sayıları göstermek üzere

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + b_3 s^{m-3} + \dots}{s^p + a_1 s^{p-1} + a_2 s^{p-2} + a_3 s^{p-3} + \dots}$$

şeklinde yazılabilir. $P-Z=2$ kabul edersek $1+KG(s)=0$ ifadesi

$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0$ olarak elde edilir. Şu halde köklerin toplamı $S_1+S_2+S_3+\dots = -a_1$, dir ve K'nin değerine tâbi değildir.

6) Reel eksen üzerindeki bir noktanın sağ tarafındaki kutup ve sıfır toplamı tek sayıda ise bu nokta geometrik yere aittir:

Böyle noktaların aç şartını sağladığı kolaylıkla görülür.

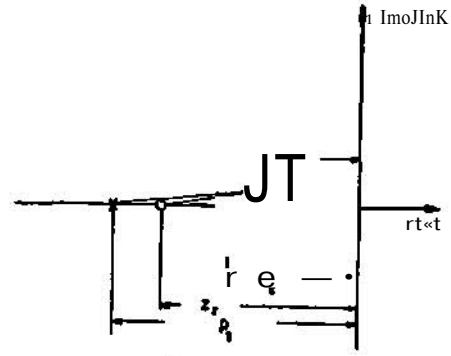
7) Reel eksen üzerindeki açık çevre kutuplarından başlayan branşların reel eksenden ayrılma noktası, bütün açık çevre kutup ve sıfırlarının reel olması halinde

$$\frac{1}{x-Z_m} - \frac{1}{x-p_k} - \frac{1}{x-Z_l} - \frac{1}{x-p_j} = 0$$

ifadesinden hesaplanabilir. Burada x ayrılma noktasının P ve Z ler ise sırasıyla kutup ve sıfırların absislerini veya orijine olan uzaklıklarını göstermektedir, n ve m x noktasının sağındaki k ve l ise solundaki kutup ve sıfırlara tekabül eden indislerdir. Şekil 6 da görüldüğü gibi ayrılma noktasına çok yakın geometrik yer üzerindeki bir A noktası için aç şartı, açılardan tanjantlarının radyan değerlerine eşit olduğu kabulüyle.

$$\frac{1}{x-p_1} - \frac{1}{x-z_1} = \frac{1}{p_2-x} - \frac{1}{z_2-x} + \frac{1}{p_3-x} - \frac{1}{z_3-x} + \dots$$

olarak yazılabilir ki bu da yukardaki ifadeden başka birşey değildir. Umumiyetle ayrılma noktasının yeri yaklaşık olarak bilindiği takdirde denklemin doğrudan doğruya çözülmesi yerine

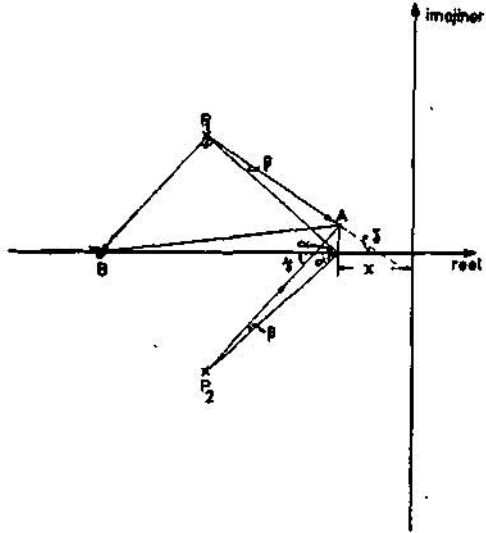


Şekil: 6

x e değerler verilerek tatonman yapılması neticeye çok daha kolay ulaştırır.

8) Ayrılma noktasının tayini bakımından kompleks sıfır ve kutuplar reel eksen üzerinde eşdeğer tesirli bir çift sıfır veya kutup olarak nazarı itibara alınır:

Şekil 7 de görüldüğü gibi orijinden x uzaklığındaki bir ayrılma noktasına nazaran B noktasındaki bir çift kutup, kompleks P_3 ve P_2 kutuplarına eşdeğerdir. Hakikaten A noktasında aç



Şekil: 7

şartı yazılırken P_j, P_2 kutuplarının varlığı dolayısıyla $\vec{P_x A}$ ve $\vec{P_2 A}$ vektörleri aç ifadesine $y=S$ değerinde bir aç katar. Şeklin geometrisinden $y=a+p$ ve $\frac{1}{y} = \frac{1}{3+8}$ eşitlikleri yazılabilir. Bu iki ifadeden $y=8=2/3$ bulunur.

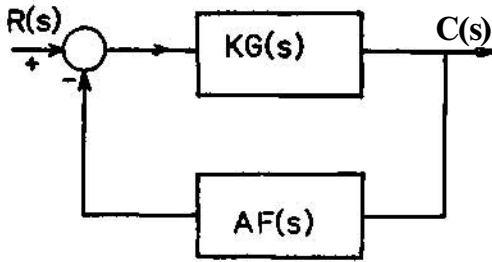
Kutuplardan A noktasına uzanan vektörlerin açık çevre transfer fonksiyonuna bağlı olduğu aç, $2/3$ mutlak değerinde pozitif bir açıdır. $\vec{P_x A}$ eP_1 noktasından çizilen dikmenin reel eksenine kestiği B noktasından A ya uzanan vektörün reel eksenle yaptığı aç ise Ax mesafesi çok küçük olduğundan P kabul edilebilir. Bu noktada çift kutup bulunduğu nazaran da aç $2/3$ olacaktır.

Buradan anlaşılıyor ki yaklaşık ayrılma noktası seçildikten sonra bu noktayı kompleks kutup veya sıfırlara birleştiren doğruya çizilen dikmelerle eşdeğer reel, çift sıfır ve kutuplar bulunur, bundan sonra da 7. özellik kullanılarak tahminin iyi olup olmadığı araştırılır.

9) Branşların imajiner eksenle kesim noktalarına tekabül eden frekans ve K kazancının değeri $1+KG(s) = 0$ denkleminde s yerine $j\omega$ konulup reel ve imajiner kısımlar ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek bulunur.

Routh Testi ile de bu malumatın elde edilmesi mümkündür.

10) Bu metot geri besleme yolunda Şekil 8 de görüldüğü şekilde transfer fonksiyonu $AF(s)$ olan bir blokun bulunması halinde de kullanılabilir.



Şekil: 8

Bu taktirde açık çevre transfer fonksiyonu $KG(s)$ $AF(s)$ ve karakteristik denklem de $1 + KG(s) AF(s) = 0$ dır.

Yukarda sıraladığımız özellikleri nazarı itibara alarak geometrik yerin ne şekilde olduğunu bir kaç misalde inceleyelim.

Misal 1

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+9)}$$

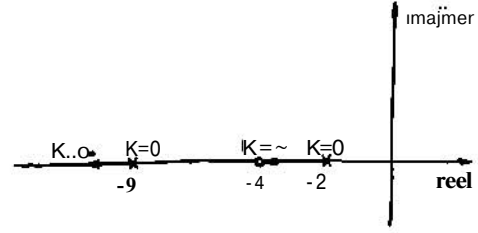
olarak verilmiş olsun.

Açık çevre kutupları $s = -2$ ve $s = -9$

Açık çevre sıfırı ise $s = -4$ dür.

Geometrik yer, açık çevre kutupları sayısı olduğuna nazaran iki branşa sahiptir. Branşların $K=0$ a tekabül eden başlangıç noktaları $s = -2$ ve $s = -9$ dur. Bu branşlardan birisi $K = 0$ s değeri için açık çevre sıfırı olan -4 noktasına ulaşacak, diğeri ise sonsuza uzanacaktır. Sonsuza giden branş asimptotuyla çakışacak yani reel eksenle yaptığı açı 180° olacaktır. Aynı zamanda reel eksenin -2 ile -4 arasındaki kısmı sağ tarafta tek bir kutup bulunduğundan geometrik yere aittir. Her iki branş da reel eksen üzerinde bulunuyor, branş sayısı ikiden fazla olamayacağına göre başka branş aranmasına lüzum yoktur. Netice Şekil 9 da gösterilmiştir.

Bu misal için karakteristik denklem klasik yolla K nın muhtelif değerleri için çözümlerse aynı neticelerin elde edilebileceği aşikârdır.



Şekil: 9

Misal 2

$$G(s) = \frac{s+9}{(s+1)(s+4)(s+10)}$$

kabul edelim.

Açık çevre kutupları $s = -1$, $s = -4$ ve $s = -10$,

Açık çevre sıfırı ise $s = -9$ dur.

Geometrik yer üç branşa sahip olacak bunlardan birisi $K = 0$ için, $s = -9$ açık çevre sıfırına erişecek diğer iki branş ise sonsuza uzanacaktır. Asimptotların sayısı iki dir; bunların

reel eksenle yaptığı en küçük açı $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$,

aralarındaki açı ise $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ olacaktır.

Kapalı çevre kutuplarının yani $1+KG(s)$ ifadesi sıfırlarının vektörel toplamı sabittir ve K nın değerine tâbi değildir. $K=0$ değeri için branşlar açık çevre kutuplarından başladığına nazaran $1+KG(s) = 0$ ifadesinin $K = 0$ için kökleri -1 , -4 , ve -10 dur. Bunların toplamı -15 vermektedir ki bu değer açık çevre kutup sayısı, sıfır sayısından iki büyük olduğuna nazaran K nın değişmesine tâbi olmayacak ve daima aynı kalacaktır. Demekki $1+KG(s) = 0$ ifadesinin herhangi bir K değeri için köklerinden ikisinin bilinmesi halinde üçüncü kök kolaylıkla hesaplanabilir.

Asimptotların başlangıç noktası verilen ifadeye göre $\frac{-1-4-10-(-9)}{2} = -3$ olarak bulunur.

Sağ tarafta tek sayıda sıfır ve kutup kalması bakımından reel eksenin -4 ve -1 arasındaki kısmı -9 ile -10 arasındaki kısımları açı şartını sağlar; geometrik yere dahildir.

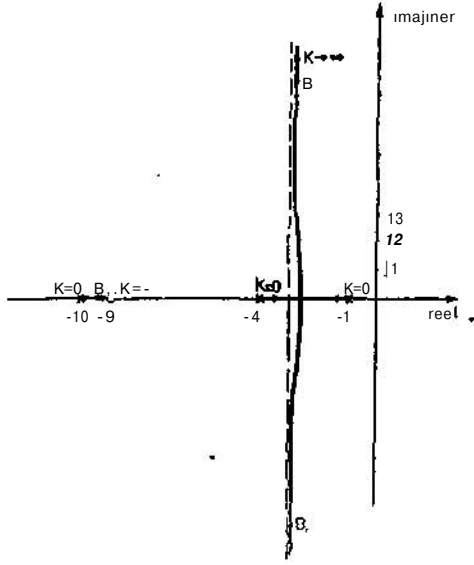
$K=0$ için -1 ve -4 kutuplarından çıkan branşlar K nın belli bir değerine kadar reel eksenin takibinde sonra ayrılırlar ve birisi yukarıya diğeri aşağıya kıvrılarak $K \rightarrow \infty$ için asimptotlara yaklaşır sonsuza uzanırlar.

Ayrılma noktası orijine x mesafede ise

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{4-x} + \frac{1}{10-x} - \frac{1}{9-x}$$

ifadesinden tatonmanla $x = 2,54$ olarak bulunur

Bukadar malumatla geometrik yer takriben çizilebilir, açı şartının sağlanıp sağlanmadığını araştırmak için iletke veya Spirale kullanılması-



Şekil: 10

na lüzum kalmadığı görülüyor. Geometrik yer üzerinde, herhangi bir noktada K değerinin ne olduğunun bilinmesi istenirse mesafeler ölçülerek amplitüd şartı kullanılır veya Spirale ile bu değer tayin edilir. B noktasına tekabül eden K değeri ölçme ile 62 olarak bulunmuştur. Aynı K değeri için diğer kökler B₁ ve B₂ olacaktır.

Misalimizde K'nın küçük değeri için karakteristik denklemin her üç kökünün de reel olduğu ve bu durumun ayrılma noktasına kadar devam ettiği görülüyor. Ayrılma noktasında iki branş çatıştığı için üç reel kökten ikisi eşit olacak; K'nın daha büyük değerleri için ise birtek reel, iki kompleks konjüge kök elde edilecektir. Ayrılma noktasına tekabül eden K değeri için sistem kritik söndürülmüştür. Bu noktadaki K değeri

$$K = \frac{J \cdot (-2,54)}{(10-2,54)(4-2,54)(2,54-1)} = 1,54 \times 1,46 \times 7,46$$

amplitüd şartından 2,6 olarak bulunur.

K = 2,6 için karakteristik denklemin iki kökü -2,54 değerine eşittir; üçüncü kök ise -9 ile -10 arasındaki üçüncü branş üzerinde bulunur. Köklerin toplamı -15 olacağına nazaran üçüncü kök -9,92 değerinde çıkar geometrik yer şekil 10 da gösterilmiştir.

Misal 3: - -

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+4)(s+10)} \text{ ise}$$

Açık çevre kutupları -1, -4, ve -10 dur.

Geometrik yer üç branşa sahiptir. Branşlar K = 0 için -1, -4 ve -10 noktalarından bağlı-

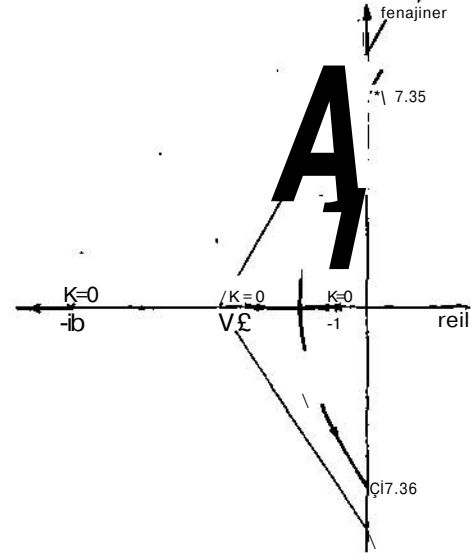
arak K > 0 için sonsuza uzanırlar. Asimptot sayısı üçtür.

$$\text{Asimptotların başlangıç noktası: } \frac{-1 + (-4) + (-10)}{3} = -5 \text{ olarak çıkar.}$$

Asimptotların reel eksenle yaptığı en küçük açı $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ dir.

Kapalı çevre kutuplarının yani karakteristik denklem köklerinin vektörel toplamı K'nın bütün değerleri için sabit ve $-1 + (-4) + (-10) = -15$ değerine eşittir.

Reel eksenin -4 ile -1 arasındaki kısmı ile -10 noktasının solunda kalan kısmı açı şartını sağladığı için geometrik yer üzerindedir.



Şekil: 11

1- ve -4 den başlayan branşların reel eksen den ayrılma noktasının orijine giriş

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{10-x} + \frac{1}{4-x}$$

ifadesini gerçekleyen x = 2,35 olarak tatonmanla bulunur.

Geri beslenmiş sistemi kritik sönümlü kılan K değeri $\frac{1}{K} = \frac{1}{(2,35-1)(4-2,35)(10-2,35)}$ ifadesinden, 17 olarak elde edilir.

Karakteristik denklemin bu K değeri için iki kökü birbirine eşit ve -2,35 değerinde üçüncü kök ise -10,3 değerine eşittir. K'nın kritik sönümüne tekabül eden değerden daha büyük olması halinde geri beslenmiş sistemin geçiş davranışı titreşimlidir.

Stabilite limitini yani branşların imajiner eksenle kesim noktalarını t y n etmek için $1+KG(s) = 0$ ifadesinde $s = j\omega$ koyalım :

$$1 + \frac{K}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)(j\omega + 10)} = 0$$

veya $-j\omega^3 - 15\omega^2 + 54j\omega + 40 + K = 0$ bulunur, imajiner kısım $j\omega(-\omega^2 + 54)$ sifira eşitlenirse ke i me noktalarının ordinatı $\omega = \pm 7,35$ elde edilir.

Reel kısmın sifira e itlenmesiyle $-15\omega^2 + 40 + K = 0$ bulunur.

Bu ifade de $\omega^2 = 54$ konularak $K = 770$ elde edilir. Stabilite limitinde karakteristik denklemin iki adet $\pm 7,35j$ e eşit imajiner kökü bir de -15 değerinde reel kökü bulunur. Reel kökün değeri gene köklerin vektörel toplamının -15 değerine eşit olmasından istifade edilerek hesaplanmıştır. Bu misale ait geometrik yer  ekil 11 de görülmektedir.

Misal 4

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 12s + 45)}$$
 olarak verilmiş olsun.

Açık  evre kutupları $0, -6 + 3j$ ve $-6 - 3j$ değerindedir.

   sonsuza uzanan branş ve    asimptot bulunur.

Asimptotların başlangıç noktası

$$\frac{0 + (-6) + (-6)}{3} = -4 \text{ olarak elde edilir.}$$

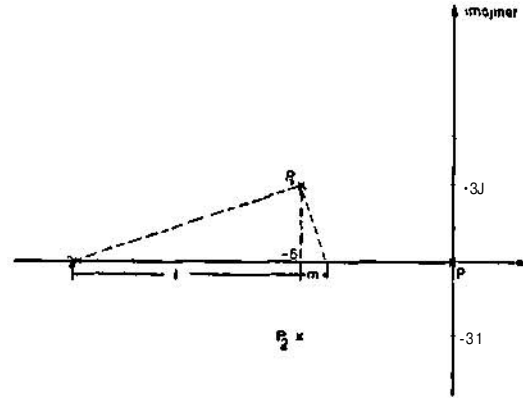
Asimptotların reel eksenle yaptığı en küçük açı 60° ve asimptotlar arası açı ise 120° dir.

Reel eksenin negatif tarafı geometrik yere aittir, zira bunun üzerindeki herhangi bir noktanın sağında bulunan kutup ve sifir sayıları toplamı tektir. K değerinin artmasıyla kompleks kutuplardan ba lıyan bran ların reel eksene inip biribiri ile kar ıla ması bu eksen üzerinde bir miktar ilerledikten sonra tekrar ayrılıp asimptotlara yaklaşması beklenebilir. Bu branşlarında reel eksen takibetmesi halinde karakteristik denklemin her    kökünün de reel olması icabedecektir.

Ayrılma noktası bu misal için ikinci dereceden bir denklemin c z m  ile elde edilebileceğinden tatonman kullanılmasına lüzum yoktur.

Şekil 12 den görüldüğü gibi ayrılma noktasının Ada bulunduğunu kabul edelim eşdeğer çift kutbun A noktasına uzaklığı $1+m$ dir. Ayrılma dik üçgen özellikleri kullanılırsa $1 = \frac{9}{m}$ elde edilir.

Ayrılma noktasının gerçekleşmesi gereken



Şekil : 12

denklemin bu taktirde $\frac{1}{6-m} = \frac{2}{1+m} = \frac{2}{9+m}$

veya $m^2 - 4m + 3 = 0$

Buradan $m_{1,2} = +2 \pm \sqrt{4-3} = 3; 1$ elde edilir.

Bu netice absisleri -5 ve -3 olan iki ayrılma noktasının varlığını gösteriyor. Bunlardan -5 noktasına kavu ma noktası demek biraz daha makul görünmektedir, zira bu noktada kompleks kutuplardan çıkan branşlar reel eksenle kavu makta ve bu hal ikinci nokta olan -2 ye kadar böylece devam etmektedir.

İki kritik noktaya tekabül eden K değerleri sırasıyla 50 ve 54 d r K bu değerler arasında değiştiği taktirde, bu açık  evre transfer fonksiyonuna sahip geri beslenmiş sistemin geçiş davranışı titre imsiz olacak yani karakteristik denklemin bütün kökleri negatif reel kalacaktır. $K = 50$ için karakteristik denklemin iki kökü -5  c nc s  ise -2 değerine eşittir. $K = 54$ olması halinde ise kökler $-3, -3,$ ve -6 olarak bulunur.

Sistemin stabilite limitinde $K = 540$ dır. Bu taktirde reel kök -12 , imajiner kökler ise $\pm j\sqrt{45} = \pm j6.7$ çıkar.

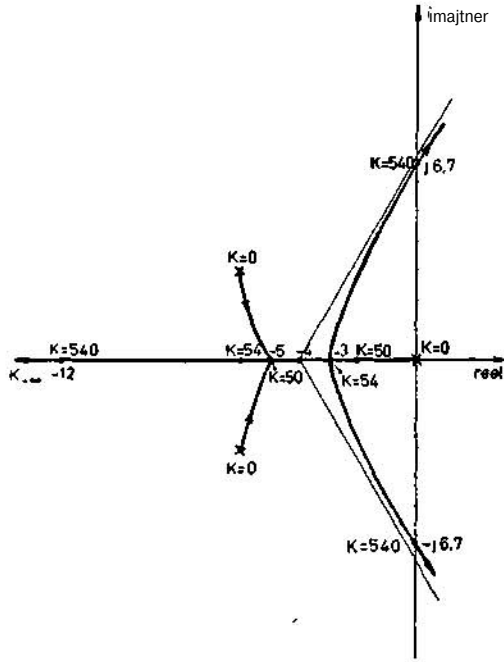
Geometrik yer  ekil 13 de görülmektedir.

Son olarak

$$G(s) = \frac{1}{s(s+a-jb)(s+a+jb)}$$
 olarak verilmiş

geri beslenmiş bir sistemin, bir veya bazı K değerlerinde kritik sönümlü olabilmesi için a ve b arasında bulunması gerekli bağintıyı arıyalım. a ve b nin herikisinin de pozitif reel olduğunu kabul edeceğiz.

Şekil 14 a dan görüldüğü üzere $b^2 = 1 \times m$ veya $1 = \frac{b^2}{m}$ yazılabilir,



Şekil: 13

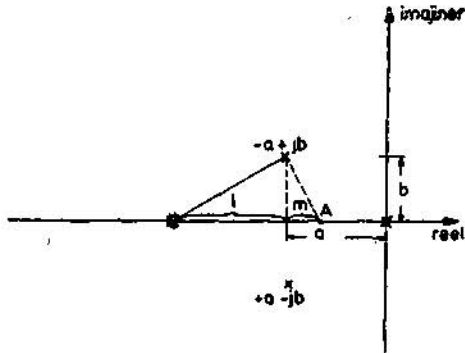
A ayrılma noktası ise

$$\frac{1}{a-m} = \frac{2}{1+m} = \frac{2}{b^2}$$
 şartı sağlanmalıdır.

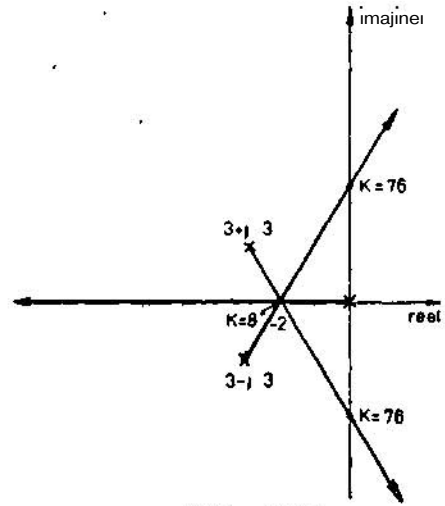
Buda $3m^2 - 2am + b^2 = 0$ denklemini verir.
 Buradan kökler $m_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 3b^2}}{3}$ olarak

çıkır, m in bir uzunluğu temsil etmesi bakımından pozitif ve reel çıkacağı aşikardır. Demekki kompleks kutuplardan çıkan branşlar ancak $a^2 > 3b^2$ olması halinde reel eksen üzerinde birleşebilirler. $a^2 = 3b^2$ hâli kavuşma ve ayrılma noktalarının çakışmasına tekabül eder. Şekil 14 b de geometrik yer $a^2 = 3b^2$ şartını sağlayan

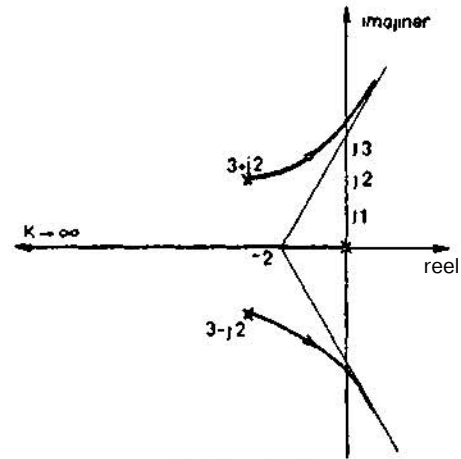
$G(s) = \frac{1}{s(s+3-JV3)(S+3+JV3)}$ için çizilmiştir. Şekil 14c ise $a^2 < 3b^2$ şartına tekabül eden



Şekil : 14 (a)



Şekil. 14 (b)



Şekil : 14 (c)

$G(s) = \frac{1}{s(s+3-J2)(S+3+J2)}$ için takribi geometrik yeri göstermektedir.

Referanslar:

- 1) Walter R Evans, «Control-System Dynamics,» McGraw - Hill Book Company, Inc , 1954.
- 2) J-C Güle, M J PÇlegirin, P. Decauline, «Peedback Control Systems,» McGraw - Hill Book Company, Inc., 1959.
- 3) John G. Truxal, «Automatic Feeüback System Synthesls,» McGraw - Hill Book Company, Inc , 1955.
- 4) John G. Truxal (editör), «Control Engineers' Handbook,» McGraw - Hill Book Company, Inc., 1958.
- 5) C. J. Savant, Jr, «Basic Peedback Controi System Design,» McGraw - Hill Book Company, Inc., 1858.
- 6) Robert A. Bruns, Robert M. Saunders, «Analysis of Peedback Control Systems,» McGraw - Hill Book Company, Inc., 1955
- 7) Harold Chesnut and Robert "W Mayer, «Servomechanisms and Regulating System Design,» 1. Cilt, ikinci baskı, John Wiley and Sons Book Company, Inc., 1959.
(Yazar son referansta bazı hatalar bulunduğu kanaatindedir.)