"FİZİKSEL BÜYÜKLÜKLERİN KARAKTERSEL ANALİZİ" ÜZERİNE NOTLAR

YASAR ERSOY

UDK: 53.081 : 621.317.6

ÖZET

Fizik yasalarının uyacağı kurallar açıklandıktan sonra Dr.Gürmen'in "Fiziksel Büyüklüklerin Karaktersel Analizi" yazısı hakkındaki bazı görüşler belirtilmiştir. Bir kuvvetin momenti ile işin farklı boyutta oldukları, Dr.Gürmen'in vektör bölümünden (\) yararlanarak yaptığı sonsuz küçük alanın vektör, basıncın skalar olduğu, vb. ise bölme (\) işlemi yapılmadan gösterilmiştir.

SUMMARY

The rules that eguations in physics obey are stated, then some comments on Dr.Gürmen's paper called "Characteristic Analysis of Physical Ouantities" are pointed out. it is shown that moment of ferce *and work have different dimensions, and inf in i t es imal area, pressure, ete. are vector, scalar, respectively without using reciprocal vector (divison of vectors) as that Dr.Gürmen done.*

Sayın Dr. H.Gürmen'in, fiziksel büyüklüklerle ilgili bağıntılar yazıldığında terimlerin boyut bakımından aynı olmaları yanışıra, skalar, vektör,... (yazarın deyimi ile aynı karakterde) olmaları gerektiği gerçekte de öyle olup, bence yeni değildir. Bu durumu daha açıklayıcı olması bakımından fiziksel büyüklüklerin tanımında ve fizik yasaları gösteren matematik bağıntılarda uyulan kuralları şöyle sıralayacağım:

1- Fizik yasaları büyüklükler arasında o tarzda yazılmalıdır ki, bu yasalar gözlemciye bağlı olmamalıdır. Bu, görelik kuramının (relativite teorisi) kurallarından biridir, örneğin Nevton mekaniğindeki yasalar Galilei grubu dönüşümü altında, Maxwell denklemleri ise Lorentz grubu dönüşümü altında invariant'tır (biçim bakımından değişmezdir). Bu kurala göre her ikisinin de aynı olması gerekir ve A.Einstein mekanikteki yasaları değiştirerek invariant şekle sokmuştur.

2- Fiziksel bir büyüklük eksiksiz tanımlanmışsa, bir fizik yasası doğru yazılmışsa, eşitliğin her iki yanındaki terimlerin boyutları aynı olmalıdır. Bu kurala fiziksel büyüklüklerin "boyut bakımından homojen olma" kuralı denir. Eğer Lj., Lj, L^ sıra ile i, j, k doğrultusundaki uzunluğun boyutları; Mç ve Mg eylemsizlik ve gravitasyon (ver çekimi) kütlesinin boyutu, T zaman, 8 sıcaklık, Q elektrik yükünün boyutu ve aı,a_2, ct_3,Bı,B2,Y>c'»'$ rasyonel sayılar ise

Yaşar Ersoy, öğretim Görevlisi, ODTÜ

$$D = \{ L_i^{\alpha_1} L_j^{\alpha_2} V^{\alpha_3} M_e^{\beta_1} M_g^{\beta_2} T^{\theta_0} Q^{\sigma} \}$$

(1)

kümesi bütün fiziksel büyüklüklerin boyutlarının oluşturduğu kümedir. Bu kümenin öğeleri Abel grubu özelliğini sağlar ve bu kümenin doğurucu öğeleri

$$D^* = \{ L_i, L_j, L_k, M_e, M_g, T, \theta, Q \} \quad (2)$$

dir. Bu durumda her fiziksel büyüklüğün diğer bir fiziksel büyüklükten farklı bir boyutu vardır.

3- Fiziksel büyüklüklerin tanımında, fizik yasalarında, bir terimin çarpanlarında farklı mertebede ve tipte tansörler (gerçek ya da psödo skalar, vektör, iki ve daha yüksek mertebeden tansör) olabilmesine rağmen, eşitlikteki her terimin aynı mertebe ve tipte tansör olması şarttır. Bunun nedeni ise, n boyutlu uzayda

$$x_i = Q_{ij} X_j, \quad (i, j=1,2 \ldots n)$$
$$\det(Q_{ij}) = \det(\underset{\sim}{Q}) = \pm 1 \quad (3)$$

gibi bir koordinat dönüşümünde, mertebesi q olan Fijk,..m diye adlandırabileceğimiz bir fiziksel büyüklüğün uygun bir biçimde dönüşmesidir. Şöyle ki, koordinat dönüşümünde

$$F_{ij \cdots m} = (\det \underset{\sim}{Q})^N Q_{ir} Q_{js} \cdots Q_{mu} F_{rs \cdots u} \quad (4)$$

dir. Eğer ? gerçek bir tansör ise N=0, psödotansör ise N=1 dir. Bu dönüşüm eğer cismin yapısındaki simetri öğeleri (bunlar matrislerle gösterilir) ise bünye yasasındaki cismin özellikle'rini belirleyen tansörse kendisine dönüşür, örneğin, izotrop olmayan bir malzemede dielektrik değişmezin sıfır olmayan 6 tane (belirli şartlarda) değişmezi varken, kübik ve izotrop cisimde 1 tane, trigonal, tetrogonalde 2 tane, monoklinikte 4 tane değişmezi vardır.

Diğer bir örnek ise koordinat takımının X£ den -Xj ye dönüşümünü sağlayan

$$\| Q_{ij} \| = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \quad (5)$$

de "del" operatörü V+-V (← £— + " ∂/∂x£) biçiminde dönüşür. Marvrell denklemleri bu dönüşüm altında değişmezler. Bunun nedeni ise elektrik alanının bir gerçek vektör, magnetik alanın da bir psödo vektör gibi dönüşmesindendir.

4- Hem alan denklemleri, hem de bünye denklemleri zamanın t •+ -t ye dönüşmesi ile değişmezler. Bunun nedeni ise büyüklüklerin işaret değiştirmesinin, psödo ya da gerçek tansör olmalarına ve cismin magnetik yapıya sahip olup olmamasına bağlı olmasıdır. Örneğin tüm magnetik vektörler t -*• -t dönüşümünde işaret değiştirirler.

Şimdi bu açıklamadan sonra Sayın Prof. Günnen'in yazısının ilk paragrafındaki "enerji ve bir kuvvetin momenti aynı boyuttadır" sözüne dönersek, bunun fiziksel büyüklüklerin boyutuna çok basit bir yaklaşımda doğru olduğunu, gerçekte yanlış olduğunu görürüz. Eğer enerji ve bir kuvvetin tanımlarına dikkatlice bakılırsa (ilki iki vektörün skalar çarpımı, ikincisi vektör çarpımı), (1) denklemi kullanılarak, köşeli ayraç içindeki terim büyüklüğün boyutunu göstermek üzere,

$$[\text{iş}] = [\text{enerji}] = L_i L_i M_e T^{-2}$$

(i üzerine toplam yok) (6.a)

$$[\text{kuvvetin momenti}] = L_j L_j M_g T^{-2} \quad (6.b)$$

bulunur. Böylece bu farklı iki büyüklüğün boyutlarının birbirinden farklı olduğu görülmektedir.

Prof. Günnen'in yazısından anlaşılan amaç, fiziksel büyüklüklerin tanımlarından yararlanarak bu büyüklüklerin skalar, vektör ya da tansör olup olmadıklarını saptamak, eğer vektörse doğrultusunu belirlemektir. Bunu yaparken kullanılan matematik yöntem iee iki vektör büyüklüğün bölümü (!) olup, bunlar kullanılarak fiziksel büyüklüklerin bazılarının tanımlarında sınanmaktadır. Bu ise matematik yönü ile yapılan cebirsel işlemlere geometrik bir anlam vermeye yöneliktir. Bu konu temelde geometrik-cebirle ilgili olup, konu fizikçi ve mühendisleri ilgilendirmekten çok matematikçileri de ilgilendirmektedir, tik önce konu matematik olarak ele alınmalıdır ve daha sonra fiziksel uygulamalara geçilmelidir. Bu konuda kendimi yetkili görmediğim için, ancak şunları kısaca belirtebileceğim.

Bilimin tarihsel gelişimi içerisinde fizikçilerin ihtiyacını karşılamak ve karışık zorlukları yenmek için zaman zaman Grassmann ve Hamilton'la başlamak üzere birbirinden farklı geometrik-cebir kurulmuş ve geliştirilmiştir, örneğin 19. yüzyılın sonuna doğru J.W.Gibbs, Grassmann'in çalışmalarından, Hamilton'un quaternionlarındaki fikirlerden yararlanarak vektör hesabını 3-boyutlu uzayda formülleştirmiştir. Vektör cebiri en çok kullanılan bir matematikken, Einstein'in özel görelik (relativite) kuramı için dört boyutlu uzay-zaman sürekli ortamında (four-dimensional space-time continuum) yeni geometrik-cebire gerek duyulmuştur. Bu gereksinim de tansör cebiri ile giderilmiş olup, tüm vektörlerle yapılan işlemler kolaylıkla tansörlerle yapılmıştır. Çok geçmeden elektronun spini için yeni bir cebirin gerektiğini Pauli önermiş ve Pauli matris cebiri kurulmuştur. Hemen sonra ise Dırac nem spin hem de özel görelik kuramını kapsayan yeni bir geometrik cebir kurmuştur.' Şimdi bile bu konularda bazı hesapları daha kolaylıkla yapmayı sağlamak için uğraşmalar ve araştırmalar devam etmektedir (Örneğin çok vektör-multivektör cebiri ile uğraşanlar var).

Benim bildiğim kadarı ile "quaternion"lar için bölme işlemi tanımlanmış olup, diğerlerinde böyle bir işlem yoktur. Sayın Günnen'in bu yazısı, Boğaziçi Üniversitesi Dergisinde, Cilt 1, s. 159-166, 1973'de yayınlanan "ters vektör" le çok yakından ilgili olduğu için, başlangıçta o yazının tartışılması gerekir. Örneğin ters vektörler cebiri, bilinen vektör cebirine mi uymakta, yoksa kendi başına yeni bir şey midir? Vektörleri de kapsamı içerisine alan tansörler için bölme ya da ters tansör diye birşey yoktur, ancak karematris olarak gösterilirse tersi hesaplanabilmektedir.

Şimdi sonsuz küçük alanın, vektörlerle ilgili bilgimizden yararlanarak, vektör bölümü (!) yapmaksızın, bir vektörle gösterildiğini açıklayalım:

ilt Î2 ve 13 sıra ile Xı, X2 ve X_3 Descartes

koordinat eksenlerine paralel birim vektörler olsunlar. Xı ve X2 doğrultusundaki şiddetleri (dxı) ve (dx2> olan iki sonsuz küçük vektör

$$(dx_1)\,I_1 \text{ ve } (dx_2)\,I_2$$

dir. Bu iki vektörün oluşturduğu sonsuz küçük alan, ikisinin vektör çarpımı olan

$$(dx_1)\,(dx_2)\,I_1 \times I_2$$

yani

$$da_s = (dx_1)\,(dx_2)\,I_3 \tag{7}$$

dir.

Diğer bir deyişle, (dxı) Jı ve (dx2> Î2 nin oluşturduğu alan bu iki vektöre dik {3 doğrultusunda ve şiddeti (dxı) (dx2) dir.

Yazarın 2. örneğinde hidrostatik basıncın skalar olduğunu (7). denklemden yararlanarak gösterebiliriz. Bir sıvıya daldırılmış bir cismin d£ "l°" m üzerine etkiyen dF kuvveti da ile orantılıdır, yani

$$dF \propto da$$

dersek, seçilen bir katsayı ile

$$dF = p(da) \tag{8}$$

yazılabilir, n, da yönündeki birim vektörü göstermek üzere (8) denklemi dF= p(da)n diye yazılabilir. Eğer her iki taraf n ile skalar çarpılır Ve n.n=1 olduğuna dikkat edilir ve sonra da her iki taraf (da)ya bölünürse

$$p = \frac{(dF)\cdot n}{da} \tag{9}$$

elde edilir. (9). denklemde p, da ya dik doğrultuda birim yüzeye etkiyen kuvveti gösterir ki, tanımından akalardır. (.Akışkanlar mekaniğinde, Navier-Stoke denkleminde skalar olarak kullanılmaktadır ve hiç bir yerde vektördür diye işlem yapılmamaktadır)

Şimdi A. ve 5. örneklere dönelim. Prof. Gürmen

$$\text{rot } B = \lim_{\Delta a \to 0} \left(\frac{\oint B \cdot ds}{\Delta a} \right) = \lim_{\Delta a \to 0} \left(\frac{\oint B \cdot ds}{\Delta a} \right) n_a$$

yazmakta. Eğer ψ mertebesi en az bir olan tansör büyüklük (eğer 1 ise vektördür), n de da yüzeyine dik doğrultuda birim vektörse, yukarıdaki "rot" eğer

$$(\text{rot } \psi)\cdot n = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{1}{\Delta a} \oint_C \psi \cdot ds \tag{10}$$

olarak tanımlanırsa, hem vektörleri bölmemiş(!) oluruz, hem de her iki yanda aynı mertebeden iki büyüklük elde ederiz (ψ nin gerçek ya da psödo vektör oluşuna göre psödo ya da gerçek skalar elde edilir). Şöyleki, rotψ nin mertebesi ψ ninkine, n ve ds ninki de, vektör oldukları için, birbirine eşittir ve Aa da psödo skalardır.

ψ büyüklüğünün diverjansı içinse, tanımından

$$\text{div } \psi = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint \psi \cdot da$$

$$= \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \oint \psi \cdot n\, da \tag{11}$$

yazılır. (11).denklemde sağ yanda ψ ile n skalar çarpımı olduğu için mertebesi 1 azalmıştır ve divψ nin mertebesine eşittir. Eğer ψ bir vektör ise divψ nin mertebesi 1-1=0 olup ψ nin tipinde bir skalardır.

(3). örnekteki yüzeysel yük yoğunluğunu vektör olarak göstermek isteniyorsa, şu şekilde gösterilebilir, phacimsel yük yoğunluğu ise, sonsuz küçük dV hacmindeki dQ toplam yükü

$$dQ = \rho dV \tag{12}$$

dir. dV hacmi, $X_1X_2X_3$ Descartes koordinat takımında (7). denklemden yararlanarak

$$\begin{aligned} dV &= (da_3)\cdot I_3\,(dx_3) \\ &= (I_1 \times I_2)\cdot I_3\,(dx_1)(dx_2)(dx_3) \\ &= 1\,(dx_1)(dx_2)(dx_3) \end{aligned} \tag{13}$$

olarak yazılır. (13). denklemi (12) de yerine koyarak

$$dQ = (I_1 \times I_2)(dx_1)(dx_2) \cdot (\rho I_3 dx_3)$$

yazılır. Eğer

$$\sigma = \rho I_3\,(dx_3) \tag{14}$$

(X_3 doğrultusunda bir vektör) olarak tanımlanırsa

$$dQ = \sigma \cdot da_s = \sigma \cdot n\, da$$

ya da

$$\sigma \cdot n = \frac{dQ}{da} \tag{15}$$

dir. Buradan, sağ tarafın bir skalar. dolayısıyla σ.n nin de bir skalar olduğu görülmektedir. Bu ise σ nin bir vektör olduğunu gösterir.

Bunlara benzer işlemlerle, örneğin sonsuz küçük bir açının bir vektör olduğunu (klasik mekanikte o tarzda kullanılır), diğerlerini ve başka büyüklükleri de (3). kurala uyacak şekilde vektör bölümü (!) kullanmaksızın göstermek mümkündür.

Kısaca fiziksel büyüklüklerle yapılacak matematik işlemlerde o fiziksel büyüklüğün mertebesini ve tipini bilmek ve yazılacak denklemlerin doğru olması için buna dikkat etmek gereklidir.