FOURİER DÖNÜŞÜMÜ*

Yazan: Ronald N. BRACEVVELL"
Çeviren: Aykut BULTAN***

DNA'nm ikili sarmalı, güneş lekesi hareketi, elektronikteki testendiş sinyali, matematiksel olarak dalgalı eğriler serisine indirgenebilir. Bu düşünce güçlü bir analitik gereç olarak kullanılabilir.

Furier dönüşümünü hesaplamak için dinlemek yeterlidir. Kulak otomatik olarak dönüşümü hesaplar, ancak aklın hesaplamayı yapabilmesi için yıllar süren matematik eğitimi gerekir. Kulak, sesi frekans tayfına (farklı perdelerdeki ses miktarları) çevirerek dönüşümü gerçekleştirir. Beyin bu bilgiyi algılanmış sese çevirir.

Benzeri işlemler matematiksel yöntemleri kullanarak ses dalgaları veya ışık dalgaları, okyanustaki gelgit olayları ve güneş hareketi örneklerinde olduğu gibi herhangi bir değişim üzerinde gerçekleştirilebilir. Bu matematiksel gereçleri kullanarak değişimleri gösteren fonksiyonları sinüzoidal dalgalar kümesine çevirebiliriz. Fourier dönüşümü, her frekansa ait sinüs dalgası için genlik ve evre hesaplayan bir fonksiyondur.

Fourier dönüşümü değişik bilim dallarında kullanılan güçlü bir teknik durumuna gelmiştir. Bazı durumlarda, Fourier dönüşümü elektrik, ısı ve ışıkla ilgili karışık eşitlikleri çözmekte kullanılabilir. Değişken bir işareti oluşturan sinüzoidal dalgaları göstererek, astronomi,tıp ve kimyada birçok kullanım alanı bulur.

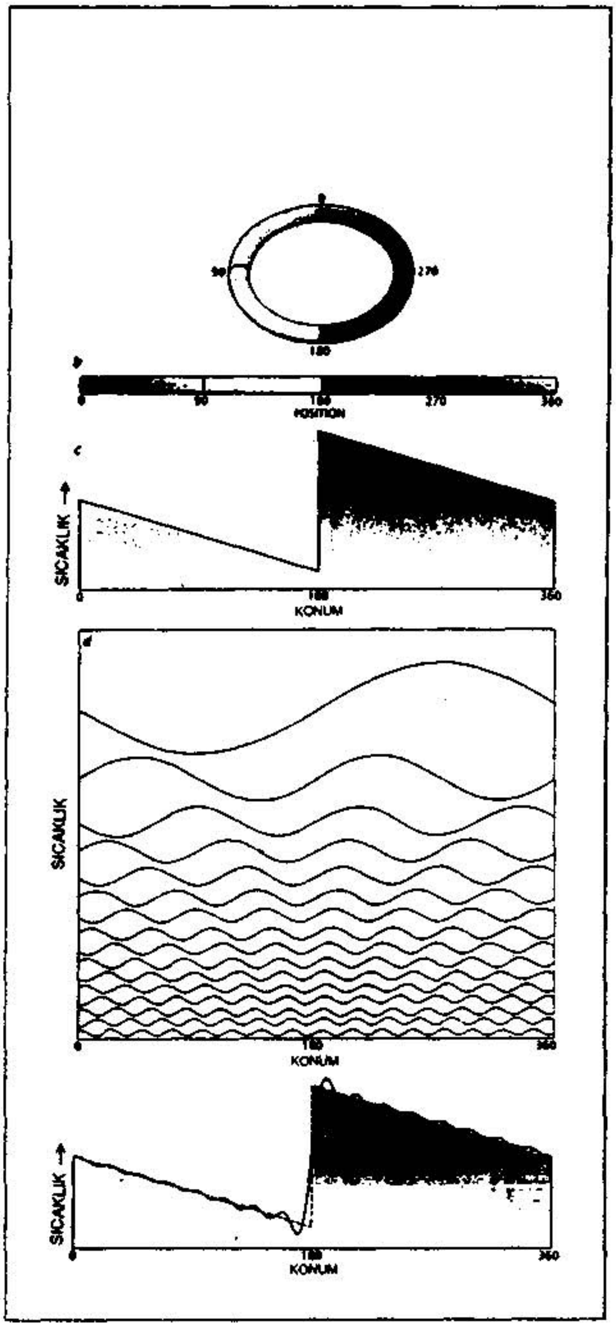
Bu tekniği, bütün dünya, tekniğe adını da veren bir matematikçiden, Jean-Baptiste-Joseph Fourier'den öğrendi. Fourier sadece ısıyla ilgilenmiyor, ısıyla içice yaşıyordu. Grenoble'daki evi öyle sıcaktı ki bütün ziyaretçiler şikayet ederlerdi. Fourier ise evde kalın giyeceklerle dolaşıyordu.

(*) Sclentlflc American, Haziran 1989. sf.62-69
(**) Ronald N. Brac«w«ll, 1955 yılından beri Stanford Üniversitesi Elektrik Mühendisliği Bölümü'nde çalışmaktadır. Sidney Üniversitesi'nde okumuş, doktorasını Cambridge'te Cavendish Laboratuvarı'nda yapmıştır. İlgilendiği konular, mikrodalga radarı, iyonosfer fiziği ve radyo astronomiyi kapsar. Stanfordla "Space Telecommintcations and Radioscience" laboratuvarının üyesi ve bilgisayar bilim profesörüdür.
(***) ODTÜ Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü Araştırma Görevlisi.

Fourier sıcak havanın cazibesine dayanamayıp, Napolyon'un Mısır'a yapacağı safere eşlik eden 165 bilginin arasına katılmıştı. Napolyon Filistin'de Suriyelilerle savaşır, Memlûk Beyi Murat Bey komutasındaki Türkleri Mısır'dan sürerken, Fransız bilim adamları coğrafya, arkeoloji, tıp ve tarım konusunda değerli çalışmalar yaptılar. Fourier, bilimsel bir kuruluş olan Mısır Enstitüsü'nde idari bir görevde çalışmaya başladı. Burada çok iyi çalıştığı için bir çok diplomatik başarı elde etti. Bu arada eski Mısır eserleri konusunda yoğun araştırmalar yapmaya ve cebir eşitliklerinin kökleri ile ilgili bir kuram tasarlamaya da zaman bulmuştu.

Fransızlar 1801'de Mısır'dan sürülmeden kısa bir süre önce Fourier ve meslektaşları Fransa'ya gitmek üzere gemiye binmişlerdi. İngiliz donanması komutanı Amiral Sir Sidney Smith, bu gemiyi içindeki Mısır dökümanları ve eserleriyle birlikte ele geçirdi. Zamanın onurlu ruhunun temsilcilerinden komutan Smith. bilim adamlarını hiç bir zarar vermeden İskenderiye'de kıyıya indird . İngiliz komutanı daha sonra ele geçirdiği malzemeyi teslim etmek için Paris'e gitti. Yalnızca Rosetta taşını yanında götürdü. Bu taş Mısır hiyeroglif yazısı için bir anahtar sayılır ve bugün British Museum'da Napolyon'un yenilgisinin ve Mısırolojiye katkısının bir anıtı olarak durmaktadır.

Fransa'ya sağlam dönmeyi başaran Fourier Polytechnıc School'da analiz profesörü olarak çalışmaysı başıadı ve matematiksel konular üzerinde çalışmalarını yoğunlaştırdı. Ancak, 1802'de tekrar Napolyon'un hizmetine girdi ve *İşere* bölümünün başına geçti. Bir yandan 1789 Devrimi'nden kalan hasarları onarırken, diğer yandan Turin yolunun Fransa bölümünü inşa etti ve 80,000 kilometrekarelik sıtmalı bataklığı kuruttu. Bu sıra arda, ısının katılarda iletimi konusunda bir eşitlik türetti. 1807'e doğru ise bu eşitliği çözecek bir yöntem buidu, Fourier Dönüşümü!



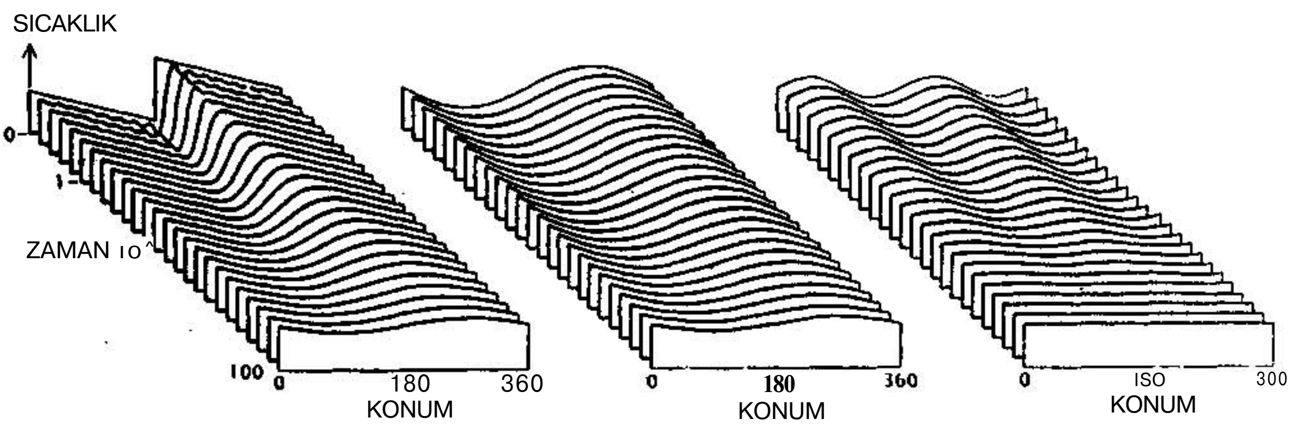
ŞekiH: ***Demir çemberin sıcaklığı Fourier tekniğiyle analiz edilen ilk durumlardan biridir. Başlangıç anında çember etrafındaki ısı dağılımı görülmektedir (a). Çember açMtğındaki ısı dağılımı verilmiştir. Parlak renkler daha sıcak kısımları göstermektedir (b). Sıcaklık her noktada ölçülmüş ve çemberin çevresindeki sıcaklık dağılımı çıkarılmıştır (c). Daha sonra sıcaklık dağılımı bir, iki ve daha yüksek harmonMere dönûştOrOlebilirfd). Bu eğrilerden 16 tanesi toplanırsa ((e)'deki düz çizgiler), özgün sıcaklık dağılımına çok yakın bir seki oluştururlar.***

Fourier bu matematiksel tekniği ısı iletiminin pek çok durumunu açıklamak için kullandı. Bu konuda hesap karışıklığına yol açmayacak açıklayıcı bir örnek olarak, yarısı ateşe sokulmuş demir bir çember üzerindeki ısı değişimi verilebilir. Çemberin bir kısmı kızaracak kadar ısınınca, ateşten çıkartılır ve ısı havaya yayılmadan ince bir kuma daldırılır ve çevresinin etrafındaki sıcaKlık dağılımı ölçülür(Bkz. Şekil 1 ve Şekil2).

İlk durumda sıcakık dağlımı düzensizdir, çemberin bir kısmı tamamen soğuk diğer kısmı ise tamamen sıcaktır ve birleşme yerinde bir ısı sıçraması olmaktadır. Isı, sıcak kısımdan soğuk kısma doğru aktıkça' sıcakık yumuşak bir dağılım göstermektedir. Bir süre sonra ise çember etrafındaki ısı dağılımı sinOzoidal bir şekil alır ve sıcaklık eşit aralıklarda düşüp artmaya başlar. Sinüs dalgası zamanla düzleşir ve sıcaklık dağılımı bütün çember etrafında sabit bir değere ulaşır.

Fourier ilk durumdaki düzensiz dağılımın, basit sinüs dalgalarına indirgenebileceğin! önerdi. Her sinüsün kendi sıcaklığı ve evresi, yani çember üzerindeki göreceli konumu vardı. Ayrıca her sinüzoidal eleman çember çevresindeki bir dönüşte maksimum ve minimum arasında tam sayıda bir iniş ve çıkış gösteriyordu. Bir başka deyişle, her sinüsün periyodu çember çevresini bir tam sayıya bölerek elde edilebilirdi. Periyodu, çemberin çevresine eşit olan sinüse ana harmonik, periyodu çemberin çevresinin yarısına, üçte birine veya daha küçük bir oranına eşit olan sinüslere ise sırasıyla kinci, üçüncü ve yüksek harmoniler denildi. Her sinüs için maksimum sıcaklığı ve konumu yani evreyi gösteren fonksiyon, sıcak dağılımının Fourier dönüşümüdür. Fourier matematiksel olarak ifadesi zor olan bir sıcaklık dağılımını kullanımı kolay bir sinüs ve kosinüs fonksiyonları kümesine çevirdi ve bu fonaksiyonların toplamı da özgün sıcaklık dağılımını veriyordu.

Fourier bu analizi uygularken, sinüslerin çember etrafındaki periyod sayılarının artmasıylą doğru orantılı olarak o kadar çabuk yok olacakları sonucuna vardı. Bu düşünceyi anlayabilmek için, sıcaklık dağılımının ana harmoniğiyle ikinci harmoniği arasındaki ilişki incelenebilir. Çember çevresinde ikinci harmoniğin ısısı, sıcakla soğuk arasında iki kere yol alır, oysa ana harmonik sadece bir kere yol alır Bu nedenle ikinci harmoniğin'en,sıcakla en soğuk arasında alacağı yol, ana harmoniğin alacağı' yolun yarısına eşittir. Ayrıca ikinci harmonikteki sıcaklık değişimi, asıl harmonikteki değişimin iki katıdır. İki katı sıcaklık akışı yarısı kadar uzunlukta olduğundan, ikinci harmonik ana harmoniğin yarısı kadar zamanda yok olur. Yüksek harmonikler ise daha çabuk yok olacaklardır. Böylece, çemberin sıcaklığı denge noktasına yaklaştıkça kalıcı olan ana harmonik oluyordu. Fourier, herhangi bir başlangıç sıcaklık dağılımının, zaman içindeki değişimlerinin bu teknikle hesaplanabileceğine inanıyordu.



Şekil 2: ***Demir çember üzerindeki ısı iletimi, sıcaklık dağılımının zaman içinde değişimine neden olur. Herhangi*** *bir andaki sıcaklık* ***dağılımının sinüslerin toplam olarak gösterebildiğimiz için, sıcaklık dağılımının zaman*** *içindeki değişimini sinüs/erdeki değişimlerden* ***bulabiliriz. Ana harmonik (ortada) ve ikinci harmonik (sağda) şekilde gösterilmiştir. Fourier*** *ikinci harmoniğin ana harmoniğe göre dön* ***kat hızla, daha yüksek harmoniklerin ise daha da hızlı sönümleneceğine karar vermiştir. Ana*** *harmonik uzun süre kalıcı olduğundan,* ***toplam sıcaklık dağılımı ana harmoniğin sinüzoidal şekline benzer.***

Fourier'in analizi çağdaşlarının sımsıkı sarıldıkları kuramlara meydan okuyordu. 19. yüzyılın başlarında, Parisli üstün yetenekli birçok matematikçi —örneğin Lagrange, Legendre, Laplace, Biot, ve Poisson — Fourier'in iddiasını, yani herhangi bir başlangıç ısı dağılımının, asıl ve yüksek frekanslı harmoniklerin aritmetik toplamına indirgenebileceğim' kabul etmediler. Leonhard Euler de Fourier'in düşüncelerinde hata olduğunu söyledi; oysa kendisi daha önce bazı fonksiyonların sinüslerin toplamı şeklinde yazılabileceğini önermişti. Fourier Fransız Bilimler Akademisi'ndeki toplantıda iddiasını açıkladığında Lagrange ayağa kalktı ve bunun mümkün olamıyacağını söyledi.

Bu şartlar altında dahi, Akademi Fourier'in çiKardığı sonuçların önemini gözardı etmedi ve ona ısı yayılımımn matematiksel kuramı üzerindeki çalışmaları ve kuramının sonuçlarını hassas deneylerle karşılaştırıması nedeniyle ödül verdi. Ancak ödül açıklanırken şöyle bi uyarı da yapıldı: "Konusunun yeniliği ve önemi bizi bu çalışmayı ödüllendirmeye yöneltti. Yazarın bu eşitliklere ulaşması kolay olmamıştır, ancak analiz tekniği genelleştirmeye ve kesinliğe ihtiyaç duymaktadır."

Meslektaşlarının Fourier'in çalışmalarına karşı takındığı olumsuz tavır, çalışmaların basımını 1815'e kadar geciktirdi. Aslında, 1822'de "The Analytical Thaory of Heat" (Isının Analitik Kuramı) adlı kitabı yayınlanıncaya kadar çalışmaları tam olarak açıklanmamıştı.

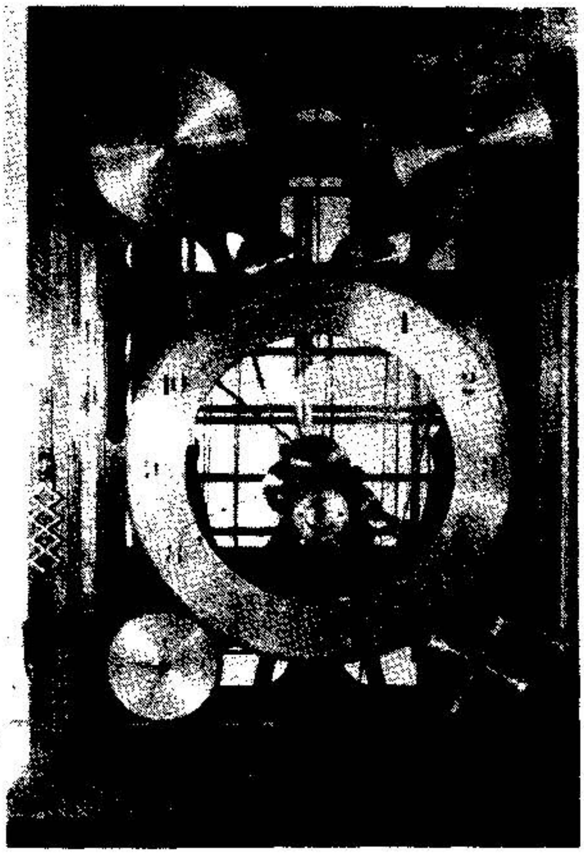
Fourier'in yaklaşımına gelen itirazlar şu noktada toplanıyordu: Süreksiz bir fonksiyon, sürekli sinüzoidal fonksiyonların toplamı şeklinde gösterilemez. Süreksiz fonksiyonlar kırık eğriler ve kırık çizgelere benzer, örneğin birim basamak fonksiyonu yatay eksendeki sıfır noktasında sıçrama yaparak sıfır değerinden bir değerine yükselir. (Böyle bir fonksiyon anahtar açıldığında geçen akımı gösterebilir). Fourier'in çağdaşları süreksiz bir fonksiyonun sıradan sürekli fonksiyonlar, örneğin doğrusal, ikilenik *(çuadratic)* ve üstel *(exponential)* fonksiyonların bileşimi şeklinde gösterilebileceğini göremediler. Eğer Fourier haklı olsaydı, sonsuz sayıdaki sinüslerin toplamının sıçramalar yapan süreksiz bir fonksiyona yakınsaması gerekiyordu. O zaman da bu düşünce tamamen anlamsız gözüküyordu.

Bu itirazlara karşın, bazı araştırmacılar, örneğin matematikçi Sophie Germain ve mühendis Claude Nauier, Fourier'in çalışmasını ısı analizinin dışındaki konulara da uygulamaya çalıştılar. Ancak matematikçiler için süreksiz bir fonksiyonun, sinüs fonksiyonlarının toplamı olarak eksiksiz bir şekilde gösterilebileceği düşüncesi tam bir baş belasıydı.

Yakınsamak sorusu, sonsuz tane sayıyı toplamaya kalkınca ortaya çıkar. Klasik bir örnek verebiliriz: Eğer her adımımızda kalan uzaklığın yarısı kadar yol alırsak bir duvardan diğerine ulaşabilir miyiz? İlk adımımızda ayak ucu yolun yarısına, ikinci adımda yolun 3 çeyreğine ve beşinci adımın sonunda yolun yaklaşık %97'sine ulaşmış olur. Bu aslında karşı duvara ulaşmak gibidir, ancak kaç adım atarsanız atın karşı duvara tam olarak varamazsınız, öte yandan matematiksel olarak duvara sonsuz küçüklükte bir mesafe kalacak kadar yaklaşabileceğimizi gösterebiliriz. Bu gösterim 1/2, 1/4, 1/8... şeklinde devam eden bir serinin toplamının 1'e yakınsayacağını göstermekle eşdeğerdir.

Fourier serilerinin yakınsaması sorusu, 19. yüzyılın sonlarında gelgit olaylarındaki su çekilmesi ve yükselmesini tahmin etme çalışmaları sırasında tekrar ortaya çıktı. Lord Kelvin askeri ve ticari gemi mürettebatı için, gelgit olayları hakkında bilgi veren bir anatog bilgisayar buldu. Yılın değişik zamanlarında belirli gelgit yükseklikleri ve karşılık gelen zamanlar defalarca ölçülüyor ve bu ölçümler kullanılarak genlik ve evre hesapları elle yapılıyordu. Her genlik ve evre çifti gelgit yükseklik fonksiyonunu oluşturan sinüslerden birini gösteriyordu. Bu sonuçlar Lord Kelvin'in bilgisayararına girilince gelecek yılın gelgit yüksekliği elde ediliyordu. Gelgit eğrileri bir süre sonra dünyanın her yerindeki limanlar için çıkarılmaya başlandı.

Açıkça görüleceği gibi gelgit tahmin makinasının parça sayısı arttıkça daha fazla genlik ve evre işleyebilecek ve daha iyi tahminler yapabilecektir. Ancak eğer matematiksel fonksiyonumuz keskin bir sıçrama yapıyorsa, yani süreksiz bir fonksiyonsa bu düşünce tam olarak doğru diyemeyiz. Böyle bir fonksiyonu az sayıda genlik ve evre bilgisiyle, yani az sayıda Fourier terimiyle göstermeye çalıştığımızı düşünelim. Fonksiyonun kendisiyle, Fourier terimlerinden oluşturulan fonksiyon arasındaki hata değerleri her nokta için bulunur ve kaydedilir. Her defasında daha fazla Fourier terimi kullanılarak hata değerleri bulunur. Bütün durumlarda maksimum hata eksilmeyecektir. Ancak, hatanın süreksizliğin olduğu bölgeye sıkıştığı ve giderek azaldığı diğer noktalarda ise



Şekil 3: *FERREL GELGİT TAHMİN MAKINASI 19.yy'da yapılan bir anatog bilgisayardır. Fourier sentezini kullanarak su yükselmesi ve çekilmesini tahmin eder. Bir limanda ölçülen gelgit yûksekelikleri el hesaplarıyla bir sayılar kümesine çevrilebilir. Her sayı gelgiti oluşturan periyodik büyüklüklerden birini gösterir, örneğin ayın kütlesel çekimi gibi. Belirii bir liman için ölçülen sayılar makineye arkasında bulunan düğmeleri çevirerek girilir. Makinenin önündeki zaman ayarlandığında, tahmin edilen gelgit yüksekliği kadrandan okunabilir.*

sıfıra yaklaştığı gözlenecektir. Yale Üniversitesrnden Josiah Willard Gibbs bunu 1899'da kuramsal olarak göstermiştir.

Fourier analizi birtakım anormal durumlarda uygulanamaz. Örneğin, sınırlı bir bölgede sonsuz sayıda sıçrama yapan bir fonksiyona uygulanamaz. Ancak fiziksel bir büyüklüğün ölçülmesinden oluşan tüm fonksiyonlar için Fourier serisi yakınsayacaktır.

özel bazı fonksiyonlar için Fourier serisinin yakınsayıp yakınsamayacağı sorusu üzerine yapılan araştırmalar matematikte yeni alanların gelişmesine yol açmıştır. Bir örnek olarak genelleştirilmiş fonksiyonlar kuramını *(the Theory of Generalized Functions)* verebiliriz. Bu kuram İngiltere'den George F.J. Temple, Polonya'dan Jan G. Mikusinski ve Fransa'dan Laurent Schwartz tarafından oluşturulmuştur. Kuram 19451e birim basamak fonksiyonu ve delta fonksiyonu için sağlam bir temel oluşturmuştur; ayrıca Fourier dönüşümünü kütle noktası, yük noktası, manyetik çiftkutup *(d'pole)* gibi kavramları içeren eşitlikleri çözmek için kullanabilmemizi sağlamıştır.

Yaklaşık iki yüzyılık bir gelişme döneminden sonra Fourier dönüşümü tekniğinin teorisi sağlam bir şekilde kurulmuş ve iyi bir şekilde anlaşılmıştır. Gördüğümüz gibi", Fourier analizi uzaydaki veya zamandaki bir fonksiyonu frekans, genlik ve evresi değişen sinüzoidal elemanlara indirger. Fourier dönüşümü her frekanstaki genlik ve evreyi gösteren bir fonksiyondur. Dönüşüm iki matematiksel metotla hesaplanır; birincisi fonksiyon sürekli ise ikincisi ise fonksiyon kesikliyse *(discr&te)* uygulanır.

Eğer fonksiyon kesikliyse, yani fonksiyon kesikli zaman aralıklarına ait değerlerden oluşuyorsa, ayrık frekanslardaki sinüzoidal fonksiyonların serisi şeklinde gösterilebilir. Bu frekanslar asıl frekansın iki, üç ve daha büyük katlarıdır. Bu şekildeki sinüslerin toplamına Fourier serisi denir.

Eğer fonksiyon sürekliyse, yani her gerçek sayı için tanımlı bir değeri varsa bu fonksiyon tüm frekanslardaki sinüslerin Fourier integraline indirgenebilir. Fourier dönüşümü ne seri ne de integral değildir. Kesikli fonksiyonlarda, Fourier serisini oluşturan evrelerin ayrık frekanslara bağlı listesidir, sürekli fonksiyonlarda ise Fourier integralinin alınmasından ortaya çıkan frekansa bağlı bir fonksiyondur.

Dönüşüm hangi yöntemle hesaplanırsa hesaplansın, her frekansta iki sayının hesaplanması gerekir. Bu iki sayı genlik ve evre olabilir, veya aynı bilgiyi içeren farklı iki sayı da olabilir. Bu iki sayı, bir karmaşık *(comptox)* sayı ile gösterilebilir. Bu gösterim çok kullanılır, çünkü karmaşık cebir işlemlerine olanak sağlar. Karmaşık cebir kuramı ve Fourier dönüşümü, elektrik devresi tasarımın-da, mekanik titreşim analizi ve dalga yayılımı çalışmala-nnda yapılan sayısal hesaplamalarında ayrılmaz bir bütün oluştururlar.

özgün fonksiyonu karmaşık Fourier dönüşümüyle göstermek hesaplarda avantajlar sağlar. Klasik bir örnek olarak, bilinen bir gerilimin uygulandığı devredeki akım hesabını verebiliriz. Dolaysız yöntemde, gerilim ve akım fonksiyonlarını içeren türevsel denklem *(differential eçuathn)* çözümü gereklidir. Akım ve gerilimin Fourier dönüşümleri alındığında ise çözüm çok kolaydır.

Bugün Fourier dönüşümü üzerine yapılan çalışmalar, fonksiyon ve dönüşümü arasında özgürce hareket edebilecek teknikleri elde etmeye yöneliktir. Fourier integralini almak için analitik yöntemler kullanılabilir ve dönüşüm bulunur. Herhangi birisi için bu yöntemler zo olabilir, ancak pek çok Fourier integrali bulunmuş ve başvuru tablolarında listelenmiştir. Dönüşümle ilgili bazı kuramları öğrenmek ve uygulamak yoluyla karışık dalga şekilleri daha basit elemanlara indirgenebilir.

"Bilgisayarlar ve programlar geliştikçe Fourier analizi için yeni yönetimler ortaya çıktı ve hesaplar çok kolaylaştı. Yapılan bu çalışmalar "Hızlı Fourier Dönüşümü" diye bilinen programın ortaya çıkmasını sağladı. "

Deneysel ölçüm değerleriden oluşan fonksiyonların veya Fourier integrali kolayca hesaplanamayan ve tablolarda bulunmayan fonksiyonların Fourier dönüşümü sayısal teknikler kullanılarak bulunabilir. Elektronik bilgisayarlar çıkmadan önce, sayısal hesapları kağıt ve kalemle yapmak gerçekten zor bir işti. Formları ve tabloları kullanarak bu zaman azaltılabilirdi ancak yine de berbat bir işti.

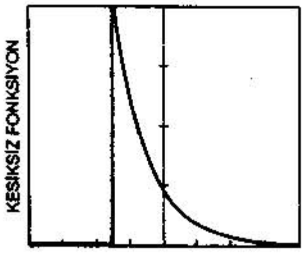
Ne kadar aritmetik işlem yapılacağı fonksiyonu gösteren noktaların sayısına bağlıdır. Toplama işleminin sayısı nokta sayısına, çarpma işleminin sayısı ise nokta sayısının karesine yakındır, örneğin 1,000 düzenli aralıklarla alınmış noktadan oluşan bir dalganın analizi için yaklaşık 1,000 toplama ve bir milyon çarpma gerekir.

Bilgisayarlar ve programlar geliştikçe Fourier analizi için yeni yöntemler ortaya çıktı ve hesaplar çok kolaylaştı. 19651e IBM Thomas J. Watson Araştırma Merkezi'nden James W. Cooley, Murray Hill'deki Bell Telephone Laboratorieslen John W. Tukey bu tür bir program yazdılar. Onların çalışmaları "Hızlı Fourier Dönüşümü" diye bilinen programın ortaya çıkmasını sağladı.

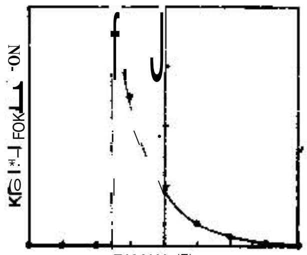
Hızlı Fourier dönüşümü çarpmaların sayısını azaltarak zamandan kazanır. Çarpma sayısının önemi, çarpma işleminin diğer bilgisayar işlemlerine (toplama, saklama, vb.) göre daha fazla zaman almasmdandır.

FOURİER VE HARTLEY DÖNÜŞÜMLERİ

Fourier ve Hartley dönüşümleri zamana bağlı fonksiyonları, genlik ve evre bilgisi taşıyan fonksiyonlara çevirir. Aşağıdaki şekiller sürekli g(t) fonksiyonu ile kesikli g(T) fonksiyonuna aittir, burada t zamanı, T ise her noktaya verilen sayıyı göstermekledir.



ZAMAN(t)



ZAMAN (T)

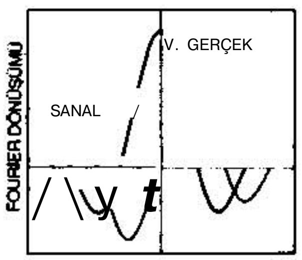
İki fonksiyon da sıfırdan başlar, pozitif bir değere sıçrar ve üstel olarak inişe geçer. Sürekli fonksiyon için Fourier dönüşümünün tanımı aşağıda verilen F(f) integrali, kesildi fonksiyon için ise F(v) toplamıdır.

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,(\cos 2\pi ft - i \sin 2\pi ft)\,dt \qquad F(v) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} g(\tau)\,(\cos 2\pi v\tau - i \sin 2\pi v\tau)$$

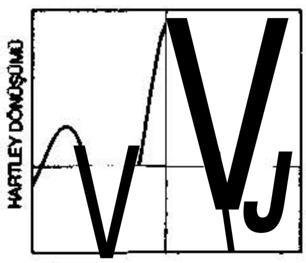
Burada f frekansı, V frekansa bağlı bir değeri, n toplam örnek sayısını ve i ise -1'in kareköküne eşit sanal sayıyı gösterir. Integral gösterimi kuramsal yaklaşımlara, sonlu toplam gösterimi ise bilgisayar uygulamalarına daha yatkındır. Hartley dönüşümü ve kesikli Hartley dönüşümünün tanımları da şöyledir.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(f)\,(\cos 2\pi ft + \sin 2\pi ft)\,dt \qquad H(v) = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} g(\tau)\,(\cos 2\pi v\tau + \sin 2\pi v\tau)$$

Fourier ve Hartley dönüşümlerinin arasındaki tek biçimsel fark sinüs fonksiyonunun önündeki -i faktörü olarak görünse de esas olarak Fourier dönüşümünün gerçek ve sanal kısımlarının olması, iki dönüşümü çok farklı kılar. Kesikli Fourier ve kesikli Hartley dönüşümleri sürekli dönüşümlerine karşılık gelen şekillere benzer şekiller çıkartır.

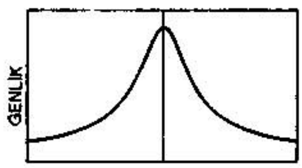


FREKANS

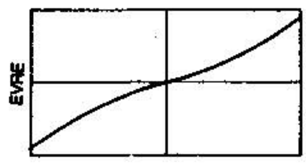


FREKANS

Şekiller farklı görünmesine karşın Fourier ve Hartley dönüşümlerinden çıkarılacak genlik ve evre bilgisi aşağıda görüldüğü gibi aynıdır.



FREKANS



FREKANS

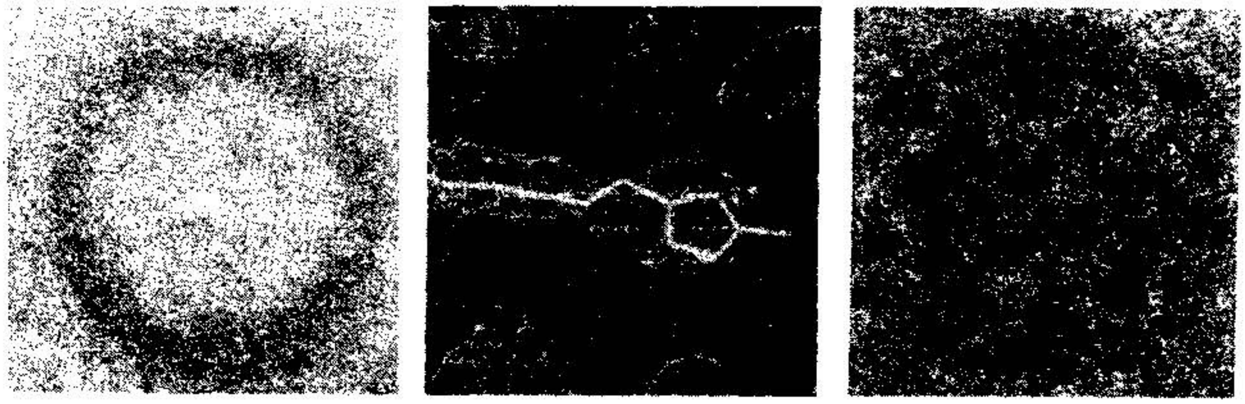
Fourier genliği gerçek ve sanal kısımların kareleri toplamının kareköküdür. Hartley genliği ise H(-v) ve H(v)'nin karelerinin toplamını kareköküdür. Fourier evresi, sanal kısmın gerçek kısmına bölümünün $\tan^{-1}$ i, alınarak Hartley evresi ise H(-v)'nin H(v)ye bölümünün $\tan^{-1}$ine 45° eklenerek bulunur.

Hızlı Fourier dönüşümü, eğri üzerinde eşit aralıklarla çok sayıda örnek alır. Örnek sayısı yarıya düşürülürse, eğrinin analizi için gereken çarpma sayısı da yarıya düşer. Örneğin, 16 örnekten oluşan eğri için 16'nın karesi yani 256 çarpma gerekecektir. Eğer eğriyi iki tane 8 örnekten oluşan parçaya ayırırsak, her parça için 8'in karesi yani 64 çarpma gerekecektir. İki parça için toplam 128 çarpma olacaktır ki bu da önceki durumun yarısına eşittir.

Eğer örnek serisini ikiye bölmek işlem sayısını azaltıyorsa neden bölmeye devam etmeyelim? Örnek serisini alt bölümlere ayırmaya devam edersek 8 tane 2 noktadan oluşan ve bölünemeyen parçalar elde ederiz. Bu iki noktadan oluşan parçaların Fourier dönüşümü çarpma yapmadan hesaplanabilir, ancak dönüşümün tamamını hesaplarken parçaları birleştirmek gerekir ve burada çarpma işlemi zorunludur. önce sekiz tane iki-noktalı dönüşüm, dört tane dört-noktalı dönüşüme, sonra iki tane sekiz-noktalı dönüşüme ve sonunda istenen 16-noktalı dönüşüme çevrilir. Her birleşme sırasında16 çarpma gerekir ve bu üç birleşme için toplam 48 çarpma eder. Bu da 256'lık özgün değerin 3/16'sına eşittir.

İşlem sayısını düşürmek için izlenen bu yöntemin düşüncesi Cooley ve Tukey'den çok öncelere, gökbilimci Cart Frtedrich Gauss'a kadar uzanır. Gauss küçük gezegenlerin ve kuyruklu yıldızların yörüngesini az sayıda gözlemle hesaplamak istiyordu. Çözümü bulduktan sonra, hesapların karmaşıklığını azaltmak için hızlı Fourier dönüşümündeki ilkelere çok benzeyen yöntemler kullandı. 1805"teki yayınında şöyle yazmıştı: "Kullanıcı deneyim kazandıkça bu yöntemin mekanik hesaplamaları çok azalttığını görecektir." Gökyüzü hareketlerine yönelik araştırmalar, sadece yüksek matematiği ve hareketin üç kuralını ortaya koymakla kalmamış, modern bir hesaplama yöntemine de kaynak oluşturmuştur.

Eğitimlerinin başlarında karmaşık



Ş«kll 4: ***FOUİER ANAUZİ X-ışını kırınım şekiterini mohkOhr modellere dönüştürür. X-ışınları virüsteki elektronlan saçarak film üzerinde şekMler oluşturur. Bu şekiSer virüsün molekûler yapısının Fourier dönüşümünün bir kısmını gösterir. Eğer dönüşüm işlemi tersine yapılırsa elektron dağılımı ve sonuçta atom dağılımı bulanabilir. Bu dağılımlardan virüsün modelleri yapılabilir. Burada farklı renkler farklı proteinleri gösterir.***

cebirle tanışan mühendis ve fizikçiler sinüslerin gösteriminde rahat ederler. Fourier dönüşümünü karmaşık bir fonksiyon olarak göstermek, bize karmaşık sayıyı oluşturan sinüslerin gerçek fonksiyonlar olduğunu unutturabilir. Bu düşünce alışkanlığı, 1942'de Ralph V. L Hartley tarafından tasarlanan dönüşümün öneminin anlaşılmasını engellemiş ve kabul görmesini geciktirmiştir.

Hartley, Western Electric Company'da çalışırken transatlantik radyo telefonları için gereken radyo alıcılarının erken gelişimine önderlik etmiş ve Hartley salıngacını *(oscillator)* bulmuştur. 1. Dünya Savaşı sırasında Hartley dinleyicinin kulak ve beyindeki mekanizmaları kullanarak sesin geliş yönünü nasıl algılandığını araştırmıştır. Savaştan sonra Bell Laboratorieste çalışırken, bilişim teknolojisindeki önemli bir kuralı ilk ortaya koyan kişi olmuştur. Bu kurala göre, bir sistemin göndereceği bilgi miktarı, sistemin gönderme frekans bant genişliğiyle gönderme zamanının çarpımına doğru orantılıdır. 1929'da Hartley, hastalığı nedeniyle yönetimindeki gruptan ayrılmak zorunda kaldı.

Sağlığı düzelince, kendini kuramsal çalışmalara adadı ve bu çalışmalar "Hartley Dönüşümü'nü ortaya çıkardı.

Hartley dönüşümü eldeki bir fonksiyonu sinüsler cinsinden analiz etmek için bir alternatiftir. Fourier dönüşümünden ayrılır. Fourier dönüşümü gerçek ve karmaşık sayıları ve sinüslerin karmaşık toplamını içerirken, Hartley dönüşümü yalnızca gerçek sayıları ve sinüslerin gerçek toplamını içerir.

1984 yılında bu makalenin yazarı, hızlı Hartley dönüşümü için bir algoritma geliştirmiştir. Hızlı Hartley dönüşümü ile hızlı Fourier dönüşümünün hesaplama zamanı arasındaki fark, kullanılan bilgisayara, programlama diline ve tjpirtebağlıdır. Eğer bu unsurlar sabit tutulursa, hızlı Hartley dönüşümünü hesaplayan programlar hızlı Fourier dönüşümünü hesaplayan programlara göre daha hızlı çalışırlar.

İlk önceleri, Hartley dönüşümünün, Fourier dönüşümüyle aynı bilgiyi taşıdığı pek açık değildi. Bu nedenle, Hartley dönüşümünü hesaplamak için yazılan programlarda, bunu alışkın olduğumuz Fourier dönüşümüne çevirmek için fazladan bir işlem yapılıyordu. Ancak bir süre sonra, bu konuda çalışanlar, Hartley dönüşümünden genlik ve evre bilgisinin doğrudan hesaplanabileceğini gördüler. Ayrıca iki dönüşümden her birinin her frekansta genlik ve evre için iki bilgi taşıdığı açıklık kazandı.
Fourier dönüşümünün üstün bir yanı fiziksel olguların gösterilmesinde daha uygun olmasıdır. Pek çok durum, örneğin basit bir sistemin titreşime gösterdiği tepki, sinüzoidal fonksiyonların karmaşık toplamı şeklinde gösterilebilir. Bu nedenle, Fourier dönüşümünün doğanın davranışların göstermek için daha uygun olduğu söylenebilir.

Aslında bu çıkarım doğadan değil, bizim matematiksel eğitimimizden kaynaklanmaktadır. Her şeyden önce ölçtüğümüz fiziksel nesnelerin hiç birisi karmaşık sayı değil gerçek sayıdır.

'Fourier dönüşümü ayrıca plazma fiziğinde, yarı iletken fiziğinde, mikrodalga akustiğinde tıbbi görüntüleme sistemlerinde, denizbilimde (oceanography), sismografide önemli yer tutar. „

Hızlı Hartley dönüşümünün ortaya çıkması bazı hızlı Fourier dönüşümü uygulamalarını ortadan kaldırmıştır. Buna örnek olarak sayısal kaydedilmiş müzikteki gürültüyü temizlemeyi verebiliriz. Burada iki program kullanılmaktadır. Birincisi gerçek fonksiyonları karmaşık Fourier tanım kümesine *(domain)* dönüştürür, diğeri ise Fourier tanım kümesindeki fonksiyonları gerçek fonksiyonlara çevirir. Sayısal kayıtlı müzikteki yüksek frekanslı gürültü birinci program kullanılarak bulunan dönüşümü süzerek temizlenir. Daha sonra ikinci program bu süzülmüş dönüşümü temiz müzik işaretine çevirir. Bu iki program ayrı ayrı hızlı Hartley dönüşümüne yakın hızlarda çalışsalar bile, tek başına bir Hartley programı hem gerçek fonksiyonun dönüşümünü alır, hem de süzülmeden sonra dönüşümü gerçek fonksiyona geri çevirir. Sonuçta iki program için boş yere bilgisayar belleği kullanılmamış olur.

Genelleme yaparsak, Fourier ve Hartley dönüşümleri düzensiz değişim gösteren durumlarla ilgilenen bütün alanlarda kullanılabilir. Bu nedenle uygulama alanı çok geniştir.

Biyolojide birçok uygulaması vardır. Aslında DNA'nın ikili sarmal şekli X-ışını kırınım *(diffraction)* tekniklerini ve Fourier analizini kullanarak 1962'de bulunmuştur. Bir X-ışını demeti DNA liflerinin kristaline odaklanır ve DNA molekülleri tarafından kırman X-ışınları filme kaydedilir. Bu kırınım yapısı, kristal yapının Fourier dönüşümünün genlik bilgisini taşır. Fotoğraflarda olmayan evre bilgisi ise, DNA'nın yarattığı yapısıyla benzeri kimyasal maddelerin yarattığı kırınma yapısını karşılaştırarak elde edilir. Biyologlar Fourier dönüşümündeki X-ışını şiddeti ve evre bilgisinden yararlanarak kristal yapıyı, yani özgün fonksiyonu elde ettiler. Son yıllarda X-ışını kırınımı çalışmalarıyla ters Fourier analizi *(Reverse Fourier Analysis)* pek çok biyolojik molekülün yapısını ve virüs gibi daha karışık yapıları açıklamak için kullanılmaktadır.

(The National Aeronautics and Space Administration) Ulusal Havacılık ve Uzay idaresi kurumu gökyüzü cisimlerini görüntüleyen uzayda çekilmiş resimlerin ayrıntılarını netleştirmek ve kalitesini artırmak için Fourier analizini kullanmaktadır. Gezici sondalar *(planetary probes)*ve dünya etrafında yörüngelenmiş uydular dünyaya görüntü bilgisini radyo vurumlarıyla *(impulse)* gönderirler.

Bilgisayar bu vurumların Fourier tekniklerini kullanarak dönüşümünü alır. Daha sonra bilgisayar her dönüşümünü bazı elemanlarını ayarlayarak resmin kimi özelliklerini ön plana çıkarır, diğerlerini atar. Bu işlem müzikten gürültünün atılmasına benzemektedir. Sonunda işlenmiş dönüşüm terimlerinden görüntü tekrar elde edilir. Bu işlemle odaklama keskinleştirilebilir, sertlik *(contrast)* ayarlanabilir ve fondaki bulanıklık giderilebilir.

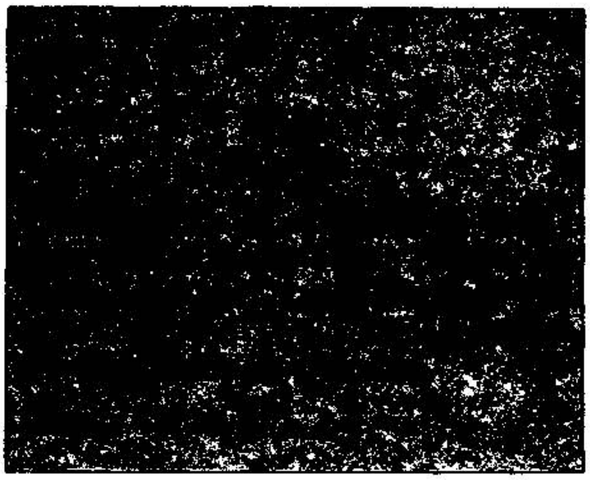
Fourier dönüşümü ayrıca plazma fiziğinde, yarı iletken fiziğinde, mikrodalga akustiğinde tıbbi görüntüleme sistemlerinde, denizbilimde *(oceanography),* sismografide önemli yer tutar. Kimyadaki önemli uygulamalarından birisi de Fourier dönüşüm sepektrometresinin kimyasal analizdeki kullanımıdır.

Benim yaptığım iki boyutlu görüntüleme çalışmalarında Fourier analizinin değeri kanıtlanmıştır. 1956'da ise, dilim projeksiyonu *(projection slice)* kuramına takıldım ve bu durum daha sonra şerit *(strip)* integrallerinden görüntüyü tekrar oluşturma olayına, yani bugün "tomografik görüntüleme" diye bilinen olaya yol açmıştır. Daha sonra değiştirilmiş geri projeksiyon *(modified back projection)* algoritmasıyla uğraştım. Bugün bu algoritma bilgisayar destekli X ışını tomografisinde *(CAT)* kullanılmaktadır.

Ayrıca, radyo astronomiden elde edilen verilerle tekrar görüntü oluşturmakla ilgilendim. Güneşin yüzeyinde oluşan radyo dalgalarının kaynaklarını tam olarak göstermek istedim. Bu amaçla dönüşüm yöntemlerini taramalı *(scanning)* teleskobun tasarımında kullandım ve bu aygıtın yardımıyla 11 yıl boyunca güneşin günlük mikrodalga sıcaklık haritasını çıkardım. Bu yöntemler gözün ayrımsama gücünden daha keskin demete sahip ilk anteni ortaya çıkarmış ve genel anten teknolojisindeki yerini almıştır. NASA güneş haritalarını ay astronotlarının güvenliği açısından kullanmaktadır.

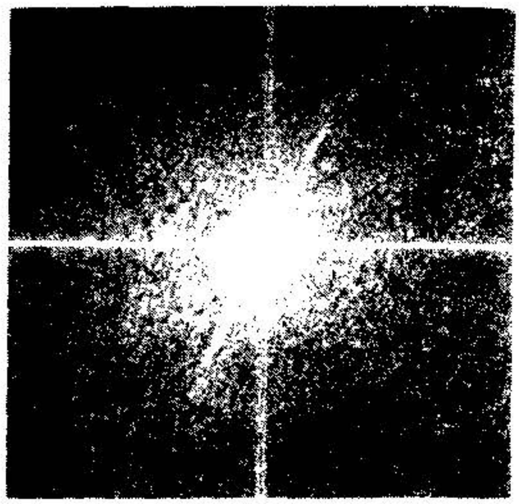
Bunların yanısıra Hartley dönüşümünü kullandığım bazı çalışmalar da yaptım. Son zamanlarda meslektaşım John D. Villasenor ile birlikte Hartley dönüşümünü bulan optik bir yöntem tanımladım. Bu yöntemle Fourier genlik ve evre bilgisi bir gerçek değerli görüntüye kodlanabilmektedir. Ayrıca birlikte mikrodalga kullanarak Hartley dönüşümünü alan bir aygıt geliştirdik. Şu sıralarda ise güneş fiziği üzerine yayınlar hazırlıyorum. Bu yayınlarda, dönüşüm teknikleri kullanarak güneş lekesi sayımlarıyla ilgili verilerin analizi ve yeryüzü katmanlarının kalınlığıyla ilgili analiz yer almaktadır.

Fourier ve ilgili analitik tekniklerin geniş kullanımı, 1867'de Lord Kelvin'in söylediklerini bugün için de geçerli kılmaktadır: "Fourier kuramı modern analizin en güzel sonuçlarından biri olmakla kalmayıp, aynı zamanda modern fizikteki pek çok bilinmeyene yaklaşımda vazgeçilemez bir araç olmuştur".

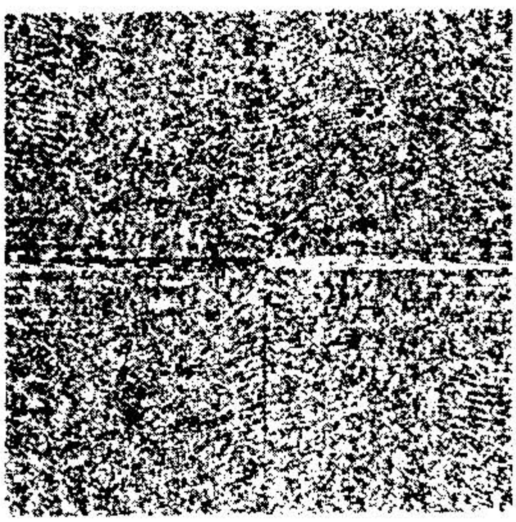


GÖRÜNTÜ İŞLEME VE
2 - BOYUTLU FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

A



B

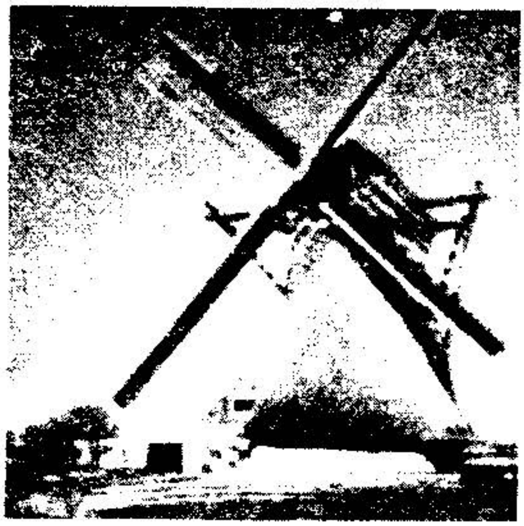


C

D

E

F



G

(a) Jean Baptiste Joseph Fourier'in Resmi
(b) (a)'daki resmin 2-boyutlu Fourier dönüşümünün büyüklüğü
(c) (a)'daki resmin 2-boyutlu Fourier dönüşümünün evresi
(d) 2-boyutlu Fourier dönüşümünün büyüklüğü (b)'deki gibi olan ve evresi sıfıra eşit olan resim.
(e) 2-boyutlu Fourier dönüşümünün evresi (c)'deki gibi olan ve büyüklüğü 1 'e eşit olan resim.
(f) 2-boyutlu Fourier dönüşümünün evresi (c)'deki gibi olan ve büyüklüğü (g)'deki resmin 2-boyutlu Fourier dönüşümünün büyüklüğüne eşit olan resim.
(g) Herhangi biryeldeğirmeni resmi!

Kaynak: A.V. Oppenheim, A.S. Willsky. I. T. Young *'Signals and Systems",* Prentice - Hail, 1983